

MÉCANIQUE ET ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUES

Dionys Baeriswyl et Xavier Bagnoud

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG

15 février 2012

Table des matières

1	Introduction	1
2	Mécanique de Lagrange	3
2.1	Contraintes et coordonnées généralisées	3
2.2	Équation de d'Alembert	7
2.3	Équations de Lagrange	9
2.4	Principe de Hamilton	14
2.5	Symétries et théorème de Noether	15
2.6	Mouvement du corps rigide	18
2.6.1	Équations de Lagrange du corps rigide	18
2.6.2	Équations d'Euler	22
3	Mécanique de Hamilton	24
3.1	Fonction et équations de Hamilton	25
3.2	Crochets de Poisson	28
3.3	Transformations canoniques	31
3.4	Fonctions génératrices	32
3.5	Théorie de Hamilton-Jacobi	33
3.6	Espace des phases	37
4	Champ électromagnétique	40
4.1	Electrostatique et magnétostatique	40
4.2	Equations de Maxwell	43
4.3	Ondes électromagnétiques dans le vide	46
4.3.1	Ondes planes	46
4.3.2	Rayon de lumière	48
4.3.3	Paquet d'ondes	49
4.4	Potentiel vecteur et potentiel scalaire	51
4.4.1	Existence des potentiels et choix de la jauge	51
4.4.2	Jauge de Lorentz	53
4.4.3	Jauge de Coulomb	53
4.4.4	Potentils retardés	54
4.5	Champ électromagnétique d'une particule chargée en mouvement rectiligne uniforme	56

5	Particule chargée dans un champ électromagnétique	58
5.1	Force de Lorentz	58
5.2	Fonctions de Lagrange et de Hamilton	59
5.3	Energie totale du système particule et champ	60
6	Électrodynamique dans les milieux matériels	62
6.1	Polarisation de la matière	62
6.2	Aimantation de la matière	65
6.3	Électrodynamique macroscopique	67
6.4	Relations constitutives	69
6.5	Ondes électromagnétiques dans la matière	72
6.6	Réflexion et réfraction	74
6.6.1	Conditions de bord	74
6.6.2	La loi de Snell	76
6.6.3	Intensités et polarisations	77
7	Rayonnement	79
7.1	Champ de rayonnement	79
7.2	Modèle simple d'une antenne	82
7.3	Rayonnement d'une charge ponctuelle	84
7.4	Émission dipolaire	85
7.5	Au-delà des approximations simples	87
8	Électrodynamique et relativité	88
8.1	Transformations de Lorentz	89
8.2	Scalars, quadrivecteurs et tenseurs	94
8.3	Électrodynamique covariante	97
9	Mécanique relativiste	102
9.1	Cône de lumière	102
9.2	Cinématique et dynamique relativiste	106
9.3	Problème des deux corps en relativité	111
10	Appendices	113
10.1	Calcul variationnel	113
10.2	Distribution de Dirac	116
10.3	Transformée de Fourier	117
10.4	Intégration dans le plan complexe	119

BIBLIOGRAPHIE : Mécanique et électrodynamique classiques

1. H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, Classical Mechanics, 3d edition, Addison-Wesley 2002.
2. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Mechanics, Course of Theoretical Physics, Vol. 1, 3d edition, Elsevier 1976.
3. R.J. Jelitto, Theoretische Physik Bände 1 und 2 (Klassische Mechanik), Band 3 (Elektrodynamik), zweite Auflage, Aula-Verlag 1987.
4. J. R. Taylor, Classical Mechanics, University Science Books 2005.
5. J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3d edition, John Wiley 1999.
6. D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 3d edition, Prentice Hall 1999.
7. J. Schwinger *et al.*, Classical Electrodynamics, Perseus Book 1998.

Chapitre 1

Introduction

La fin du 19^{ème} siècle a connu l'aboutissement de deux théories physiques : la mécanique classique et l'électrodynamique. Certains physiciens de l'époque pensaient que la physique avait atteint son couronnement. Toutefois, deux problèmes restaient sans solution :

- l'hypothèse de l'éther, référentiel indispensable à la propagation de la lumière, n'était pas vérifiée,
- le spectre du rayonnement du corps noir ne trouvait pas d'explication dans le cadre de l'électrodynamique et de la thermodynamique.

On connaît aujourd'hui les deux conséquences importantes tirées des réponses à ces questions. La première conduisit à la théorie de la relativité restreinte que l'on développera à la fin de ce cours et la seconde à la mécanique quantique qui sera abordée au semestre de printemps de la deuxième année.

L'approche commune de la mécanique et de l'électrodynamique classiques que nous proposons dans ce cours repose sur deux notions fondamentales de la physique : le mouvement du point matériel et le champ électromagnétique. La logique qui réunit ces deux éléments s'appuie d'une part sur l'étude du mouvement d'une particule chargée et sur la détermination du champ qu'elle produit et d'autre part sur l'analyse de l'interaction du champ avec les charges.

La mécanique et tout particulièrement la mécanique céleste a été au centre des préoccupations des scientifiques de toutes les civilisations. Elle connut un point culminant à la suite des travaux de Newton (1642-1727) publiés dans "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" et que l'on considère comme la publication la plus influente de tous les temps. Par la suite, la mécanique évolua vers des formulations plus raffinées telles que la mécanique de Lagrange (1736-1813) et la mécanique de Hamilton (1805-1865) que nous présentons dans les chapitres 2 et 3 de ce cours.

Les phénomènes électriques et magnétiques sont connus depuis l'antiquité, mais leur interprétation complète dans une théorie unifiée ne date que du 19^{ème} siècle. A la suite de la découverte des lois fondamentales telles que la loi de Coulomb (1785), la loi de Biot-Savart (1820), la loi de Faraday (1831) et des travaux de Gauss et Weber, Maxwell élaborera une théorie unifiée des phénomènes électriques et magnétiques et la publia en 1873 dans "*Treatise on Electricity and Magnetism*". Le champ électromagnétique qui constitue

la manifestation essentielle de cette théorie sera présentée dans le chapitre 4. Ses liens avec la mécanique apparaîtront d'abord dans l'étude du champ électromagnétique produit par une charge en mouvement. Ils reviendront ensuite dans l'approche microscopique de l'électrodynamique où l'on considère le champ en interaction avec les composants de la matière. Ces notions seront développées dans les chapitres 5, 6 et 7 de ce cours.

Enfin, l'électrodynamique est une théorie relativiste. Cependant, son expression dans un formalisme covariant, *i.e.* son écriture sous une forme directement transmissible dans tout référentiel d'inertie (référentiel de Lorentz) n'a abouti qu'en 1905 après les travaux d'Einstein. Dans les deux derniers chapitres du cours, on présentera les fondements de la relativité restreinte en dégageant son impact sur la formulation de l'électrodynamique et en analysant ses implications sur le mouvement du point matériel.

La mécanique et l'électrodynamique classiques introduisent des notions et des méthodes générales qui sont utilisées en physique théorique. Dans ce sens, le cours est complété par plusieurs appendices mathématiques qui serviront de références pour la suite des études. Pour terminer cette introduction, rappelons que ce cours repose sur les connaissances acquises en première année, tout particulièrement sur celles du cours *Introduction à la physique théorique I,II* auquel il sera fait constamment référence.

Chapitre 2

Mécanique de Lagrange

La théorie de Newton permet, en principe, de traiter tous les problèmes de la mécanique classique. Pour un point matériel m sur lequel agit la somme des forces \mathbf{F} , la démarche consiste à déterminer la **trajectoire** $\mathbf{r}(t)$ à partir de l'équation de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (2.1)$$

soumise aux conditions initiales $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$. Cependant, cette théorie est souvent mal adaptée aux systèmes soumis à des contraintes que l'on représente par des forces dont la forme n'est pas connue. D'autre part, l'expression de l'équation du mouvement (2.1) en coordonnées cartésiennes, n'est pas invariante par transformations de coordonnées. En conséquence, il faut pour chaque nouvelle situation réécrire l'équation dans les coordonnées choisies. Un exemple est donné par l'équation du mouvement du pendule plan. Comme nous allons le voir, la formulation lagrangienne de la mécanique classique permet, de par son expression scalaire, de contourner ces difficultés.

2.1 Contraintes et coordonnées généralisées

Les contraintes, comme par exemple une surface sur laquelle se meut l'objet, le fil tendu d'un pendule, \dots , peuvent être représentées par des forces que l'on dénomme force de soutien \mathbf{S} , force de traction \mathbf{T} , \dots . Ces forces que l'on désigne par \mathbf{R}_i s'appellent **réactions des contraintes**. Elles s'ajoutent aux forces d'interactions et aux forces extérieures globalement notées \mathbf{F}_i , mais leur forme est a priori inconnue. Pour un système de N points matériels m_i , on peut écrire les équations de Newton

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad i = 1, \dots, N . \quad (2.2)$$

Dans la plupart des cas, les contraintes sont fixées par des équations qui réduisent les degrés de liberté du système. En outre, elles imposent de manière naturelle un choix de coordonnées spécifiques appelées coordonnées généralisées. Pour N point matériels soumis à k contraintes dans l'espace \mathbb{R}^d , on définit le **nombre de degrés de liberté**

$$n = Nd - k . \quad (2.3)$$

Toutes ces notions sont illustrées dans les exemples qui suivent.

Exemples : Contraintes, degrés de liberté, coordonnées généralisées

1. Point matériel en mouvement sur une surface plane : $N = 1$, \mathbb{R}^3 , $k = 1$
 Pour une force \mathbf{F} donnée, le système est décrit par l'équation de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{S} .$$

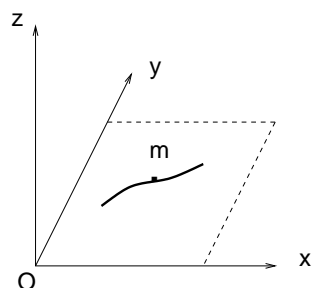


FIGURE 2.1 – Mouvement dans le plan xy

La contrainte qui oblige le point matériel à rester dans le plan xy se traduit par l'équation $z = \text{const}$. La réaction de la contrainte est la force de soutien \mathbf{S} . Alors, le nombre de degrés de liberté est $n = 2$ et les coordonnées généralisées de ce problème sont (x, y) .

2. Pendule double plan : $N = 2$, \mathbb{R}^2 , $k = 2$

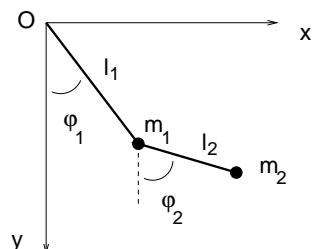


FIGURE 2.2 – Pendule double, plan

Le système est décrit par les deux équations de Newton

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_3 . \end{aligned}$$

Les contraintes imposées par les fils tendus se traduisent par les deux équations

$$x_1^2 + y_1^2 = \ell_1^2 \quad , \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell_2^2 .$$

Les réactions de ces contraintes sont les forces de traction \mathbf{T}_i , $i = 1, 2, 3$, des fils tendus. Alors, le nombre de degrés de liberté est $n = 2$ et les coordonnées généralisées de ce problème sont (φ_1, φ_2) . Leur relation avec les coordonnées cartésiennes se

déduit de FIG. 2.2 et est donnée par la transformation $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\varphi_1, \varphi_2)$, $i = 1, 2$, qui s'écrit explicitement

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell_1 \sin \varphi_1 \\ y_1 &= \ell_1 \cos \varphi_1 \\ x_2 &= \ell_1 \sin \varphi_1 + \ell_2 \sin \varphi_2 \\ y_2 &= \ell_1 \cos \varphi_1 + \ell_2 \cos \varphi_2 . \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Machine de Atwood : $N = 4$, \mathbb{R} , $k = 2$

Les contraintes imposées par les fils tendus se traduisent par les deux équations

$$x_1 + x_2 = \ell_1 \quad x_3 + x_4 - 2x_2 = \ell_2 .$$

Les réactions des contraintes sont les forces de traction des fils tendus. Alors, le nombre de degrés de liberté est $n = 2$ et les coordonnées généralisées sont par exemple (x_1, x_3) . Leur relation avec les coordonnées cartésiennes est donnée par la transformation notée $x_i = x_i(x_1, x_3)$ $i = 1, 2, 3, 4$ et qui s'écrit explicitement

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 & x_3 &= x_3 \\ x_2 &= \ell_1 - x_1 & x_4 &= \ell_2 + 2(\ell_1 - x_1) - x_3 . \end{aligned}$$

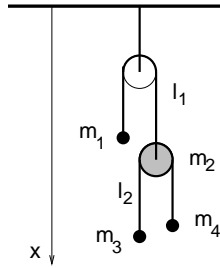


FIGURE 2.3 – Machine de Atwood

4. Double pente : $N = 2$, \mathbb{R}^2 , $k = 3$

Les contraintes imposées par les pentes (forces de soutien) et le fil tendu (forces de traction) fournissent les trois équations

$$y_1 = (a + x_1) \tan \alpha \quad y_2 = (b - x_2) \tan \beta \quad \frac{x_2}{\cos \beta} - \frac{x_1}{\cos \alpha} = \ell .$$

Alors le nombre de degrés de liberté est $n = 1$ et la coordonnée généralisée de ce problème est par exemple (x_1) .

5. Pendule sphérique : $N = 1$, \mathbb{R}^3 , $k = 1$

La contrainte imposée par le fil tendu est fixée par l'équation

$$\ell = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Alors le nombre de degré de liberté est $n = 2$ et les coordonnées généralisées sont les angles sphériques (ϑ, φ) . Le passage de (x, y, z) à (ϑ, φ) est donné par la transformation $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)$ qui définit les coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} x &= \ell \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= \ell \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= \ell \cos \vartheta . \end{aligned} \quad (2.5)$$

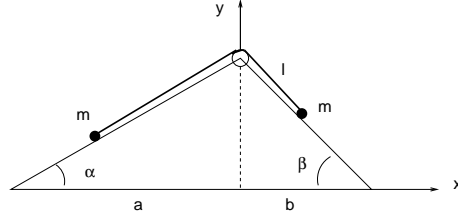


FIGURE 2.4 – Double pente

6. Disque tournant : $N = 1$, \mathbb{R}^3 , $k = 1$

Pour une masse m se déplaçant sur un disque tournant avec une vitesse angulaire ω constante, la contrainte est fournie par la condition $z = \text{const}$. Les coordonnées généralisées sont (ϱ, φ) et le passage des coordonnées cartésiennes à ces coordonnées est donné par la transformation $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varrho, \varphi, t)$ qui en composantes s'écrit

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos(\varphi + \omega t) \\ y &= \varrho \sin(\varphi + \omega t) . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dans ce cas, on a une dépendance explicite de t .

De manière générale, la position de N points matériels m_i dans \mathbb{R}^d est fixée par Nd degrés de liberté qui peuvent être représentés par les coordonnées cartésiennes \mathbf{r}_i . La présence de k contraintes réduit le nombre de degrés de liberté à $n = Nd - k$. On dit qu'une contrainte est **holonome** si elle est fixée par une équation du type

$$f_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad j = 1, \dots, k . \quad (2.7)$$

Les contraintes qui ne sont pas de la forme (2.7) sont appelées **non holonomes**. Elles peuvent par exemple dépendre de la vitesse. Les contraintes sont aussi classées en contraintes **rhéonomes** lorsque le temps apparaît explicitement et **scléronomes** dans le cas contraire. Dans la suite de ce cours, on se limitera aux contraintes holonomes. On franchit un pas essentiel dans la présentation du formalisme lagrangien en définissant les **coordonnées généralisées** : variables nécessaires pour décrire la position d'un système mécanique. Dans le cas d'un système à n degrés de liberté, on les désigne par les variables

$$q_1, q_2, \dots, q_n \quad n = Nd - k$$

qui sont reliées aux coordonnées cartésiennes $\mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N$, par une **transformation de coordonnées** inversible que l'on note¹

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad i = 1, \dots, N . \quad (2.8)$$

Les coordonnées généralisées n'ont pas nécessairement une dimension de longueur. On peut aussi définir les **vitesse généralisées** \dot{q}_j en calculant la dérivée totale de (2.8)

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} . \quad (2.9)$$

1. Dans la notation $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, on désigne abusivement la fonction qui caractérise la transformation par le même symbole que les vecteurs cartésiens \mathbf{r}_i .

Les vitesses généralisées n'ont pas nécessairement la dimension d'une vitesse. La donnée simultanée des coordonnées généralisées et des vitesses généralisées détermine l'état du système et permet, en principe, de prédire son mouvement futur. Dès lors, les variables \dot{q}_j sont indépendantes des q_j ! Ainsi, on prend note des arguments de la fonction vitesse

$$\dot{\mathbf{r}}_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) .$$

2.2 Équation de d'Alembert

Même si les équations des contraintes sont données explicitement, on ne connaît pas les forces correspondantes. Pour analyser l'effet des réactions des contraintes \mathbf{R}_i , d'Alembert a eu l'idée de considérer leur travail virtuel, *i.e.* le travail fourni par ces forces sur un **déplacement virtuel** $\delta \mathbf{r}_i$ décrit par une **variation**² de la trajectoire $\mathbf{r}_i(t)$ (voir appendice A).

Principe de d'Alembert : la somme des travaux des forces de contraintes \mathbf{R}_i sur tout déplacement virtuel est nulle

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (2.11)$$

Comme tout postulat, il résulte de l'observation. On sait, par exemple, que les réactions \mathbf{S}_i des contraintes d'un point matériel se déplaçant sur un plan satisfont le principe de d'Alembert par orthogonalité. En mots simples, quelle que soit la trajectoire dans le plan, les forces de soutien \mathbf{S}_i qui sont perpendiculaires n'apportent pas d'énergie aux masses m_i . En appliquant la condition (2.11), les équations du mouvement (2.2) se transforment en **équation de d'Alembert**

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (2.12)$$

Le déplacement virtuel est défini par la variation³ de \mathbf{r}_i par rapport au paramètre ϵ

$$\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1(t, \epsilon), \dots, q_n(t, \epsilon), t) - \mathbf{r}_i(q_1(t), \dots, q_n(t), t) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon . \quad (2.13)$$

A l'aide de la dérivée totale d'une fonction de n variables et de la règle de dérivation en chaîne, la fonction (2.8) donne

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} \epsilon = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.14)$$

2. Le déplacement virtuel correspond à la variation de la fonctionnelle identité $i : \{f\} \mapsto i[f] = f(x)$ que l'on note simplement f . Alors, la définition de la variation

$$f + h - f - \delta f[h] = o(h) \quad o(h)/\|h\| \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad \|h\| \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

donne $\delta f[h] = h$. En mots simples, la variation δf de la trajectoire traduit un changement de forme infinitésimal de la fonction $f(x)$ et non pas un déplacement selon x qui serait donné par la différentielle $df = f'(x)dx$.

3. Plutôt que de considérer un espace fonctionnel général, on restreint ici la définition de la variation à une famille de fonctions $q_j(t, \epsilon)$ indicées par le paramètre ϵ et telles que $q_j(t, 0) = q_j(t)$.

où l'on a noté la variation des q_j

$$\delta q_j = \left. \frac{\partial q_j}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon . \quad (2.15)$$

Alors, le travail virtuel des forces \mathbf{F}_i en coordonnées généralisées s'écrit

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j$$

et permet de définir les **forces généralisées**

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (2.16)$$

Exprimons l'équation de d'Alembert (2.12) en fonction des coordonnées généralisées. Avec la variation (2.14) et en utilisant la règle de dérivation d'un produit, on peut développer le premier terme de l'équation de d'Alembert

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j . \end{aligned} \quad (2.17)$$

L'énergie cinétique totale

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (2.18)$$

est contenue, comme on peut le voir en calculant les dérivées de T par rapport à \dot{q}_j respectivement q_j

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \right) \quad (2.20)$$

et en substituant dans (2.17) les deux relations

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} , \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (2.22)$$

qu'il s'agit de vérifier. Pour justifier la première, on considère la linéarité en \dot{q}_j de l'expression (2.9) de la vitesse. Pour la deuxième, il suffit d'exprimer la dérivée totale du membre de droite et d'utiliser la propriété de commutation des dérivées partielles. Finalement, avec ces deux relations et avec les composantes de la force généralisée (2.16), l'équation de d'Alembert (2.12) en coordonnées généralisées prend la forme

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 . \quad (2.23)$$

Cette équation est à la base de la formulation de la mécanique lagrangienne. De la même manière que les forces généralisées (2.16), on définit les impulsions généralisées

$$p_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (2.24)$$

où les $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ sont les quantités de mouvement. Par exemple, en coordonnées polaires, la position $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho$ et la vitesse $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$ exprimées en fonction des vecteurs orthonormés

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

conduisent aux impulsions généralisées

$$p_\rho = m \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = m(\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi) \cdot \mathbf{e}_\rho = m \dot{\rho} \quad (2.26)$$

$$p_\varphi = m \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = m(\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi) \cdot \rho \mathbf{e}_\varphi = m \rho^2 \dot{\varphi} . \quad (2.27)$$

2.3 Équations de Lagrange

L'équation de d'Alembert (2.23) est valable quel que soit le déplacement virtuel δq_j . On en déduit les équations de Lagrange de 1ère espèce

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

où l'on a les dépendances $T(q, \dot{q}, t)$ et $Q_j(q, t)$. Pour simplifier la notation, on laissera souvent tomber l'indice des arguments en écrivant $q = (q_1, \dots, q_n)$, de même pour \dot{q} . Dans le cas particulier où l'on admet que les forces \mathbf{F}_i proviennent ou dérivent d'un potentiel $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ *i.e.* satisfont la relation $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$, on obtient⁴

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (2.29)$$

où l'on a utilisé le fait que V dépend des $\mathbf{r}_i(q)$. Alors, en introduisant (2.29) dans (2.28) et en remarquant que V est indépendant des vitesses généralisées \dot{q} , on peut définir la **fonction de Lagrange**

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \quad (2.30)$$

pour aboutir aux **équations de Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n . \quad (2.31)$$

4. Dans le dernier membre de (2.29), la dérivée $\partial V / \partial q_j$ a la signification d'une dérivée totale

$$\frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right] = \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} .$$

Ces équations jouent un rôle central en mécanique classique. Elles gardent la même forme quelles que soient les coordonnées généralisées choisies. Pour une fonction de Lagrange donnée, elles permettent de formuler rapidement le problème du calcul de la trajectoire. Toutefois, la résolution de ces équations, la plupart du temps non linéaires, reste relativement difficile. Enfin, la fonction de Lagrange (2.30) et l'expression de l'énergie cinétique (2.18) montrent que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} .$$

On retrouve ainsi les **impulsions généralisées** (2.24) comme dérivées de la fonction de Lagrange.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} . \quad (2.32)$$

Avant de poursuivre notre parcours de la formulation lagrangienne de la mécanique, prenons quelques exemples simples.

Exemples : Fonctions et équations de Lagrange

a) Particule de masse m soumise à la force $\mathbf{F}(|\mathbf{r}|)$

Un point matériel m se déplace dans le plan xy sous l'action de la force $\mathbf{F}(\varrho)$. Comme la force dépend de $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, on choisit les coordonnées polaires (ϱ, φ) données par la transformation $\mathbf{r} = \varrho \mathbf{e}_\varrho$. Le calcul de la vitesse

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\varrho} \mathbf{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.33)$$

conduit à l'énergie cinétique

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2) . \quad (2.34)$$

Dans ces coordonnées, les forces généralisées deviennent

$$\begin{aligned} Q_\varrho &= \mathbf{F} \cdot \partial \mathbf{r} / \partial \varrho = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varrho = F_\varrho \\ Q_\varphi &= \mathbf{F} \cdot \partial \mathbf{r} / \partial \varphi = \mathbf{F} \cdot \varrho \mathbf{e}_\varphi = \varrho F_\varphi . \end{aligned}$$

Du calcul des dérivées

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varrho}} = m \dot{\varrho} \quad \frac{\partial T}{\partial \varrho} = m \varrho \dot{\varphi}^2 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m \varrho^2 \dot{\varphi} \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

et des équations de Lagrange (1ère espèce) (2.28) suivent les équations du mouvement d'un point matériel m soumis à la force $\mathbf{F}(\varrho)$

$$\begin{aligned} m \ddot{\varrho} - m \varrho \dot{\varphi}^2 &= F_\varrho \\ \frac{d}{dt} [m \varrho^2 \dot{\varphi}] &= \varrho F_\varphi . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ce sont des équations différentielles non linéaires, couplées dont la résolution peut être très difficile suivant la forme de la force.

b) Pendule double

On admet que les oscillations des pendules, dues à la pesanteur, sont limitées dans le plan xy . Les deux contraintes

$$\mathbf{r}_1^2 = \ell_1^2 \quad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = \ell_2^2$$

ramènent le problème à deux degrés de liberté, de coordonnées généralisées (φ_1, φ_2) . Il reste à exprimer la fonction de Lagrange

$$L = T - V = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (2.36)$$

dans ces nouvelles coordonnées. De FIG. 2.5, on tire les transformations de coordonnées

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \ell_1(\sin \varphi_1, \cos \varphi_1) \\ \mathbf{r}_2 &= (\ell_1 \sin \varphi_1 + \ell_2 \sin \varphi_2, \ell_1 \cos \varphi_1 + \ell_2 \cos \varphi_2) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les vitesses

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= \ell_1(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, -\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1) \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= (\ell_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \ell_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2, -\ell_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - \ell_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

et enfin l'énergie cinétique

$$T = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.37)$$

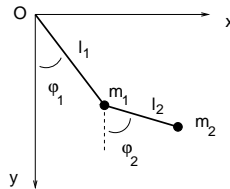


FIGURE 2.5 – Pendule double

L'énergie potentielle vaut

$$V = (m_1 + m_2)g\ell_1(1 - \cos \varphi_1) + m_2g\ell_2(1 - \cos \varphi_2). \quad (2.38)$$

On peut finalement écrire les deux équations de Lagrange en φ_1, φ_2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_j} = 0 \quad j = 1, 2 \quad (2.39)$$

dont la formulation explicite est laissée en exercice. Dans le cas général, les solutions sont très compliquées puisque qu'elles peuvent donner lieu à des mouvements chaotiques. Toutefois, il est possible d'intégrer (exercice) facilement les deux équations dans le cas particulier où on les linéarise en se limitant à de petites oscillations : $\varphi_1 \ll 1, \varphi_2 \ll 1$.

c) Perle glissant sur un enroulement hélicoïdal

La perle de FIG. 2.6 glisse sans frottement sous l'effet de la gravitation. Les coordonnées généralisées appropriées sont les coordonnées cylindriques (ϱ, φ, z) . Les deux contraintes

$$\varrho^2 = R^2 \quad z = \frac{a}{2\pi}\varphi$$

limitent le mouvement à un degré de liberté que l'on peut représenter par la coordonnée z . Alors la fonction de Lagrange s'écrit

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - mgz = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \\ &= \frac{m}{2}\left(1 + \frac{(2\pi)^2 R^2}{a^2}\right)\dot{z}^2 - mgz. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Le calcul des dérivées

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\left(1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2\right)\dot{z} \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg$$

fournit l'équation de Lagrange

$$\ddot{z} + \frac{g}{1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2} = 0. \quad (2.41)$$

Avec les conditions initiales $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = 0$, l'intégration donne

$$z(t) \equiv \frac{a}{2\pi}\varphi(t) = z_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{\left[1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2\right]}t^2. \quad (2.42)$$

Pour $R \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$, on obtient évidemment $z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$.

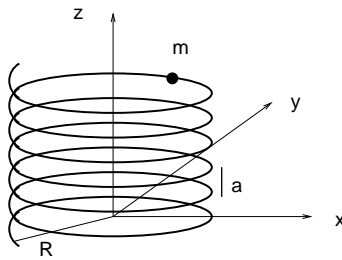


FIGURE 2.6 – Enroulement hélicoïdal

d) Pendule sphérique

Pour ce système soumis à la contrainte $\ell = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, on choisit les coordonnées généralisées (ϑ, φ) données par la transformation $\mathbf{r} = \ell\mathbf{e}_r$. La vitesse vaut alors

$$\dot{\mathbf{r}} = \ell(\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \sin \vartheta \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi). \quad (2.43)$$

On a défini les vecteurs orthonormés

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (2.44)$$

La fonction de Lagrange

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - mg(\ell - z) = \frac{m}{2} \ell^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mg\ell(1 - \cos \vartheta) \quad (2.45)$$

conduit aux équations du mouvement

$$\ddot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0 \quad (2.46)$$

$$m\ell^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{const} \equiv p_\varphi . \quad (2.47)$$

En substituant la deuxième dans la première, on obtient

$$\ddot{\vartheta} - \frac{p_\varphi^2}{(m\ell^2)^2} \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0 . \quad (2.48)$$

La multiplication par $\dot{\vartheta}$ donne l'équation

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_\varphi}{m\ell^2} \right)^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} - \frac{g}{\ell} \frac{d}{dt} \cos \vartheta = 0$$

qui laisse apparaître l'énergie

$$E = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{m\ell^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} - mg\ell \cos \vartheta \quad (2.49)$$

comme constante du mouvement *i.e.* $dE/dt = 0$. Finalement, l'intégration de (2.49) conduit à l'intégrale elliptique

$$t - t_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta'}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} - \left(\frac{p_\varphi}{m\ell^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \vartheta'} + 2\frac{g}{\ell} \cos \vartheta'}} .$$

Cette intégrale calculée numériquement permet de déterminer $\vartheta(t)$ par inversion, puis $\varphi(t)$ à l'aide de (2.47). Comme le montre l'équation (2.48), le cas particulier $\vartheta \ll 1$ (et aussi $|\pi - \vartheta| \ll 1$) est toujours décrit par une équation non linéaire.

Dans les exemples traités jusqu'ici, l'existence de la fonction de Lagrange $L = T - V$ reposait sur la présence de forces $\mathbf{F}_i(\mathbf{r})$ (2.29) dérivant d'un potentiel V tel que

$$Q_j(q, t) = -\frac{\partial}{\partial q_j} V(q, t) . \quad (2.50)$$

Lorsque les forces dépendent des vitesses, la relation ci-dessus n'est plus valable. Par contre, s'il existe un potentiel $V(q, \dot{q}, t)$ tel que

$$Q_j(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_j} , \quad (2.51)$$

l'équation (2.28) nous permet encore de définir une fonction de Lagrange $L = T - V$. On rencontrera un exemple important d'une telle fonction de Lagrange dans le chapitre 5 où l'on étudiera la particule chargée dans un champ électromagnétique.

2.4 Principe de Hamilton

On a tiré les équations de Lagrange des équations de Newton en appliquant le principe de d'Alembert. On peut aussi les obtenir en s'appuyant sur un principe d'extrémalisation. On considère un système mécanique décrit par la fonction de Lagrange $L(q, \dot{q}, t)$ et soumis à des contraintes holonomes. Pour la famille de courbes $q_j(t, \epsilon)$ de paramètre ϵ , définies sur $[t_1, t_2]$ et telles que $q_j(t, 0) = q_j(t)$, $q_j(t_1, \epsilon) = q_j(t_1)$, $q_j(t_2, \epsilon) = q_j(t_2)$, on définit la **fonctionnelle d'action** S qui, à la famille de fonctions $q_j(t, \epsilon)$, fait correspondre la valeur donnée par l'intégrale

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt . \quad (2.52)$$

Parmi toutes les courbes $q_j(t, \epsilon)$ dont dépend la fonctionnelle (2.52), quelle est la trajectoire physique $q_j(t)$? La réponse est donnée par le principe de Hamilton.

Principe de Hamilton : La trajectoire physique $q_j(t)$ entre les temps t_1 et t_2 est fournie par l'extremum de l'action

$$\delta S = 0 . \quad (2.53)$$

On détermine cet extremum en variant S^5 (voir appendice A) *i.e.* en calculant la différentielle de S par rapport au paramètre ϵ . Le calcul donne

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \int_{t_1}^{t_2} dt \left. \frac{dL}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} \epsilon \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \epsilon} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \epsilon} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} \epsilon \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la dérivée du produit et la propriété de commutativité des dérivées par rapport à ϵ et à t *i.e.* $\partial \dot{q}_j / \partial \epsilon = d/dt(\partial q_j / \partial \epsilon)$. En introduisant la notation de variation $\delta q_j = [\partial q_j / \partial \epsilon]_{\epsilon=0} \epsilon$, on obtient l'expression

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (2.55)$$

dont le deuxième terme du membre de droite s'annule en raison des conditions limites $q_j(t_1, \epsilon) = q_j(t_1)$ et $q_j(t_2, \epsilon) = q_j(t_2)$ qui donnent $\delta q_j(t_1) = 0 = \delta q_j(t_2)$. Grâce au lemme⁶ fondamental du calcul des variations, la condition $\delta S = 0$ conduit aux équations d'**Euler-Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n . \quad (2.56)$$

5. La différentielle δF d'une fonctionnelle $F : \{f\} \rightarrow \mathbb{R}$ s'appelle variation et est définie par

$$F[f+h] - F[f] - \delta F[h] = o(h) \quad o(h)/\|h\| \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad \|h\| \rightarrow 0 . \quad (2.54)$$

Pour calculer la variation, au lieu de l'espace $\{f\}$, on utilise une famille de fonctions indicées par ϵ .

6. Lemme fondamental du calcul des variations :

Si les fonctions f et δy sont continues et que $\delta y(x_1) = 0 = \delta y(x_2)$, on a

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta y(x) dx = 0 \quad \forall \delta y \quad \implies \quad f(x) = 0 \quad \forall x .$$

2.5 Symétries et théorème de Noether

Suivant les propriétés de symétries que possède un système physique décrit par la fonction de Lagrange $L(q, \dot{q}, t)$, il est possible de déduire des **intégrales premières** *i.e.* des grandeurs f qui ne changent pas au cours du temps

$$\frac{d}{dt}f(q, \dot{q}, t) = 0 . \quad (2.57)$$

On les appelle aussi **constantes du mouvement** ou **grandeurs conservées**. Si par exemple la fonction de Lagrange L ne dépend pas des coordonnées du centre de gravité, il est possible de choisir n'importe quel point de l'espace comme origine. On parle alors d'**homogénéité de l'espace**. Lorsque L ne dépend pas explicitement du temps, le choix du temps zéro est libre. On parle alors d'**homogénéité du temps**. Un système dont la fonction de Lagrange L ne change pas par rotation des coordonnées est appelé système **isotrope**. Prenons, par exemple, le cas de l'homogénéité du temps, *i.e.* $\partial L / \partial t = 0$. Alors, pour $L(q, \dot{q})$, la dérivée totale s'écrit

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] .$$

En utilisant les équations de Lagrange (2.31), on obtient l'expression

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right]$$

et finalement l'équation

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = 0 \quad (2.58)$$

qui fournit la grandeur conservée

$$E = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L . \quad (2.59)$$

Ce n'est rien d'autre que la forme généralisée du théorème de l'énergie. Dans le cas particulier $L = T - V(\mathbf{r})$, on obtient l'énergie mécanique

$$E = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - T + V = m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V = T + V . \quad (2.60)$$

Il existe un théorème général (Emmy Noether 1918) qui permet de tirer les intégrales premières à partir des propriétés de symétrie de la fonction de Lagrange. Les **symétries** sont représentées par des transformations continues des coordonnées généralisées $q_j(t)$. Ces transformations dépendent généralement d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ et s'écrivent

$$q'_j(t) = q_j(t, \alpha) \quad j = 1, \dots, n \quad (2.61)$$

avec la propriété $q_j(t, 0) = q_j(t)$.

Un exemple de symétrie est fourni par une rotation $R(\varphi)$ d'angle φ que l'on note

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t, \varphi) \equiv R(\varphi)\mathbf{r}(t). \quad (2.62)$$

On a bien $\mathbf{r}(t, 0) = R(0)\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t)$. La transformation infinitésimale est donnée par le développement de Taylor limité aux termes linéaires

$$q'_j(t) = q_j(t) + \left. \frac{\partial q_j(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (2.63)$$

qui permet de définir la variation

$$\delta q_j = q_j(t, \alpha) - q_j(t) = \left. \frac{\partial q_j(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha. \quad (2.64)$$

On dit que la fonction de Lagrange L est **invariante** sous la transformation (2.61) si

$$L' \equiv L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (2.65)$$

pour tout $q_j(t)$ et tout α . L'invariance se traduit alors par la condition

$$\delta L = L' - L = \left. \frac{dL}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha = 0. \quad (2.66)$$

On caractérise ainsi les symétries du système par l'invariance de la fonction de Lagrange sous l'action d'un groupe de transformations telles que celles données par (2.61).

Th. 2.1 Théorème de Noether

Si la fonction de Lagrange $L(q, \dot{q}, t)$ est invariante sous l'action d'une transformation $q'_j(t) = q_j(t, \alpha)$, alors la grandeur

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \quad (2.67)$$

est une intégrale première ou grandeur conservée.

Pour la preuve, on calcule la variation

$$\delta L = \left. \frac{dL}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \alpha.$$

Par hypothèse, la fonction de Lagrange L satisfait les équations de Lagrange et est telle que $\delta L = 0$. Alors, en utilisant la commutativité des dérivées $\partial/\partial\alpha$ et d/dt , on obtient l'expression

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \alpha = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right) \right]_{\alpha=0} \alpha \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \alpha = \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right] = 0 \end{aligned}$$

qui fournit la grandeur conservée (2.67).

Exemples : Symétries et grandeurs conservées

a) Invariance de translation

On considère la transformation donnée par une translation a de direction \mathbf{e} .

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t, a) = \mathbf{r}(t) + a \mathbf{e} .$$

Alors, la variation donne

$$\delta \mathbf{r} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}(t, a)}{\partial a} \right|_{a=0} a = \left. \frac{d}{da} (\mathbf{r} + a \mathbf{e}) \right|_{a=0} a = \mathbf{e} a .$$

Si la fonction de Lagrange du système considéré est invariante de translation, à savoir $L(\mathbf{r} + a \mathbf{e}, \dot{\mathbf{r}}, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, le théorème de Noether fournit la grandeur conservée

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} a e_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} a . \quad (2.68)$$

On a utilisé (2.32) pour faire apparaître l'impulsion \mathbf{p} dont la composante parallèle à la direction \mathbf{e} est conservée.

b) Invariance de rotation

On considère une rotation⁷ d'axe \mathbf{n} et d'angle φ

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}(t, \varphi) = R(\varphi) \mathbf{r}(t)$$

où R est une matrice orthogonale, *i.e.* $RR^T = I = R^T R$. Le calcul donne

$$\delta \mathbf{r} = \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r}(t, \varphi) \right|_{\varphi=0} \varphi = \left. \frac{d}{d\varphi} R(\varphi) \right|_{\varphi=0} \mathbf{r} \varphi .$$

En dérivant la relation d'orthogonalité, on obtient l'expression

$$\left. \frac{d}{d\varphi} RR^T \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{dR}{d\varphi} R^T \right|_{\varphi=0} + R \left. \frac{dR^T}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = (M + M^T) = 0$$

où $R(0) = I = R^T(0)$. Ainsi, la matrice $M = [dR/d\varphi]_{\varphi=0}$ est antisymétrique et possède donc seulement 3 composantes indépendantes, les 3 composantes de \mathbf{n} . En fait, la matrice M est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}$$

et donc (vérifier)

$$\delta \mathbf{r} = M \mathbf{r} \varphi = \mathbf{n} \times \mathbf{r} \varphi .$$

7. La représentation explicite d'une rotation d'axe \mathbf{n} et d'angle φ peut être obtenue par des considérations géométriques élémentaires (voir cours d'*Introduction à la physique théorique*)

$$\mathbf{r}' = R_{\mathbf{n}}(\varphi) \mathbf{r} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} + [\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n}] \cos \varphi + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \varphi . \quad (2.69)$$

Si la fonction de Lagrange du système considéré est invariante de rotation, à savoir $L(R\mathbf{r}, R\dot{\mathbf{r}}, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, le théorème de Noether fournit la grandeur conservée

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} (\mathbf{n} \times \mathbf{r})_j \varphi = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \varphi = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \varphi . \quad (2.70)$$

On en déduit la conservation de la composante $\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}$ du moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Par exemple, il est facile de voir que la fonction de Lagrange $L = m\dot{\mathbf{r}}^2/2 - V(|\mathbf{r}|)$ est invariante de rotation par rapport à n'importe quel axe \mathbf{n} et implique donc la conservation du moment cinétique \mathbf{L} .

2.6 Mouvement du corps rigide

Un **corps rigide** est un corps qui ne subit aucune déformation. Il est caractérisé par une densité de matière $\rho(\mathbf{r})$ distribuée dans un volume V de masse $M = \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r$. Son mouvement peut être étudié à l'aide de deux types d'équations équivalentes : les équations de Lagrange et les équations d'Euler.

2.6.1 Équations de Lagrange du corps rigide

Comment écrire la fonction de Lagrange $L = T - V$ d'un corps rigide en rotation, plongé dans un potentiel $V(\mathbf{r})$? Dans le cours d'*Introduction à la physique théorique*, on a montré, en utilisant un modèle de N points matériels, que l'énergie cinétique du corps rigide se décompose en une **énergie cinétique de translation** et une **énergie cinétique de rotation**

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{G}}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'^T \Theta' \boldsymbol{\omega}' = T_{\text{trans}} + T_{\text{rotat}} \quad (2.71)$$

où \mathbf{G} est le vecteur du centre de gravité, $\boldsymbol{\omega}'$ le vecteur **vitesse angulaire** du corps rigide et Θ' le tenseur **moment d'inertie**⁸ dont les composantes sont définies par

$$\Theta'_{\alpha\beta} = \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') [\mathbf{r}'^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_\alpha x'_\beta] . \quad (2.72)$$

8. Avec $\boldsymbol{\omega}' = \omega' \mathbf{n}$, où \mathbf{n} définit l'axe de rotation, une forme équivalente de l'énergie cinétique de rotation est $T_{\text{rotat}} = \frac{1}{2} I' \omega'^2$, où le scalaire

$$I' := \mathbf{n} \Theta' \mathbf{n} = \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') [\mathbf{n} \times \mathbf{r}']^2 = \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') [\mathbf{r}'^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2]$$

est le moment d'inertie par rapport à \mathbf{n} .

La notation prime désigne les axes fixés au corps rigide en rotation. Le tenseur d'inertie est symétrique $\Theta'_{\alpha\beta} = \Theta'_{\beta\alpha}$. Il est représenté par la matrice⁹

$$\Theta' = \begin{bmatrix} \Theta'_{11} & \Theta'_{12} & \Theta'_{13} \\ \Theta'_{21} & \Theta'_{22} & \Theta'_{23} \\ \Theta'_{31} & \Theta'_{32} & \Theta'_{33} \end{bmatrix} . \quad (2.73)$$

Si l'on considère des rotations par rapport aux **axes principaux** du corps rigide, on obtient les trois **moments d'inertie principaux**

$$\Theta'_1 = \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') [x_2'^2 + x_3'^2] \quad (2.74)$$

$$\Theta'_2 = \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') [x_1'^2 + x_3'^2] \quad (2.75)$$

$$\Theta'_3 = \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') [x_1'^2 + x_2'^2] . \quad (2.76)$$

On remarque que $\Theta'_1 + \Theta'_2 \geq \Theta'_3$ cycliquement. Lorsque les trois moments d'inertie principaux sont différents, on parle de gyroscope asymétrique. Si deux sont égaux mais différents du troisième, on parle de gyroscope symétrique (toupie). Si les trois sont égaux on parle de gyroscope sphérique. Le calcul de l'énergie cinétique de rotation, en fonction du tenseur d'inertie, a été effectué relativement à une origine O' située au centre de gravité. On peut montrer que ce choix est judicieux puisque toute translation d'origine $O' \rightarrow \bar{O}'$, donnée par le vecteur \mathbf{a} , ne change pas le problème pour autant que l'on corrige le tenseur d'inertie par la formule

$$\bar{\Theta}'_{\alpha\beta} = \Theta'_{\alpha\beta} + M [\mathbf{a}'^2 \delta_{\alpha\beta} - a'_\alpha a'_\beta] \quad (2.77)$$

connue sous le nom de **théorème de Steiner**.

Pour écrire les équations de Lagrange d'un corps rigide en rotation, il est indispensable de définir des coordonnées généralisées adaptées au mouvement de rotation. L'orientation d'un système d'axes en rotation est fixée de manière pratique par les trois **angles d'Euler** (φ, ϑ, ψ) qui sont illustrés sur FIG. 2.7 et définis par trois rotations successives :

- a) rotation d'axe z et d'angle φ
 - b) rotation d'axe ξ et d'angle ϑ
 - c) rotation d'axe z' et d'angle ψ .
- (2.78)

Alors le passage du repère au repos O au repère en rotation O' est donné par la rotation $R(\varphi, \vartheta, \psi)$ qui résulte de la composition des trois rotations a), b), c)

$$\mathbf{r}' = R_\psi \circ R_\vartheta \circ R_\varphi \mathbf{r} = R \mathbf{r} . \quad (2.79)$$

9. Pour le mathématicien, un tenseur d'ordre 2 est une forme bilinéaire. Le physicien définit un tenseur d'ordre 2 par la propriété de transformation de ses composantes $\Theta_{\alpha\beta}$. Par rotation R , on doit avoir

$$\tilde{\Theta}_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu=1}^3 R_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} \Theta_{\mu\nu} .$$

On montre que ces deux définitions sont équivalentes, voir cours *Méthodes mathématiques de la physique*.

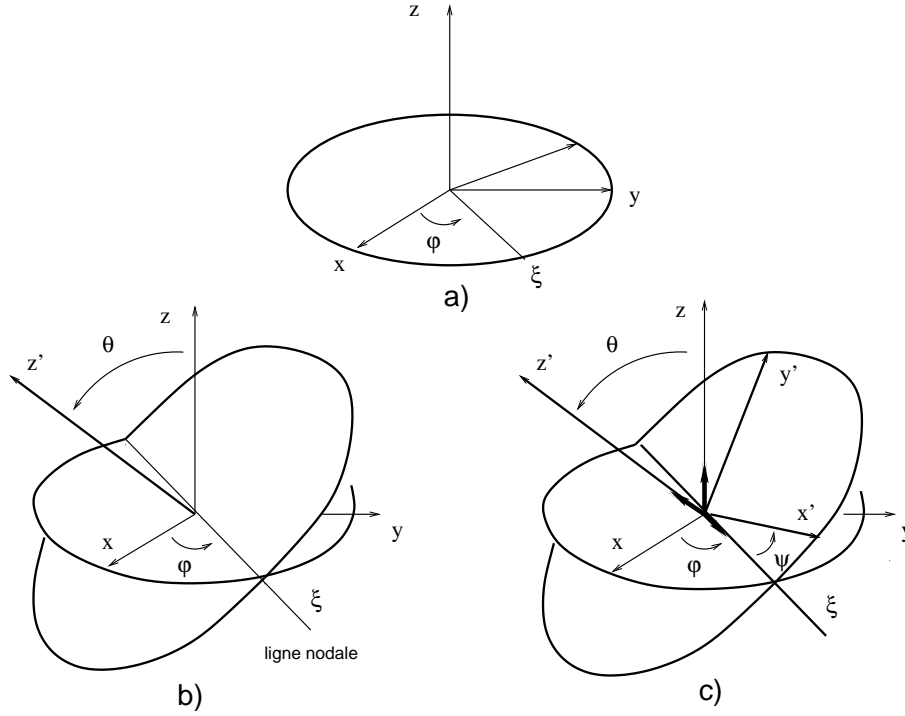


FIGURE 2.7 – Définition des angles d'Euler

En représentant chaque rotation par une matrice, on obtient

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

A l'aide de cette représentation d'une rotation, on peut calculer la matrice de vitesse angulaire $\Omega' = R^T \dot{R}$ définie dans le cours d'*Introduction à la physique théorique*. Ce calcul est direct mais long. On peut déterminer les composantes de $\boldsymbol{\omega}'$ de manière plus simple en considérant, selon FIG. 2.7, les axes de rotation (z, ξ, z') fixés par les vecteurs unitaires $\{\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\psi\}$. La vitesse angulaire est alors donnée par la combinaison linéaire

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \dot{\psi} \mathbf{e}_\psi. \quad (2.81)$$

Les composantes de ces vecteurs unitaires sont données par les projections sur les axes x', y', z' attachés au corps rigide en rotation. A partir de FIG. 2.7 c), on voit que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\varphi &= (\sin \vartheta \sin \psi, \sin \vartheta \cos \psi, \cos \vartheta) \\ \mathbf{e}_\vartheta &= (\cos \psi, -\sin \psi, 0) \\ \mathbf{e}_\psi &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (2.82)$$

D'où l'on extrait les composantes de la vitesse angulaire

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \omega'_2 &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \omega'_3 &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Grâce à (2.83), la fonction de Lagrange d'un corps rigide en rotation et soumis au potentiel V peut s'écrire dans les coordonnées généralisées appropriées

$$L(\varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}) = T - V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'^T \boldsymbol{\Theta}' \boldsymbol{\omega}' - V(\varphi, \vartheta, \psi) . \quad (2.84)$$

Exemple : Toupie soumise à son poids

Le mouvement d'une toupie ($\Theta'_1 = \Theta'_2$) de masse M , soumise à son poids est décrit par la fonction de Lagrange

$$L = \sum_{i=1}^3 \frac{\Theta'_i}{2} \omega_i'^2 - Mgl \cos \vartheta = \frac{\Theta'_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\Theta'_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \vartheta . \quad (2.85)$$

Pour cette fonction $L(\vartheta, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi})$ qui ne dépend pas explicitement des variables t, φ, ψ , le théorème de l'énergie (2.60) et les équations de Lagrange (2.31) fournissent les trois intégrales premières¹⁰

$$E = T + V \quad (2.86)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} (\Theta'_1 \sin^2 \vartheta + \Theta'_3 \cos^2 \vartheta) + \dot{\psi} \Theta'_3 \cos \vartheta \quad (2.87)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\varphi} \Theta'_3 \cos \vartheta + \dot{\psi} \Theta'_3 . \quad (2.88)$$

On vérifie que p_φ et p_ψ sont les projections du moment cinétique \mathbf{L}' (2.94) sur \mathbf{e}_φ respectivement \mathbf{e}_ψ . De (2.87) et (2.88), on tire les équations couplées pour φ et ψ

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\Theta'_1 \sin^2 \vartheta} \quad \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{\Theta'_3} - \dot{\varphi} \cos \vartheta . \quad (2.89)$$

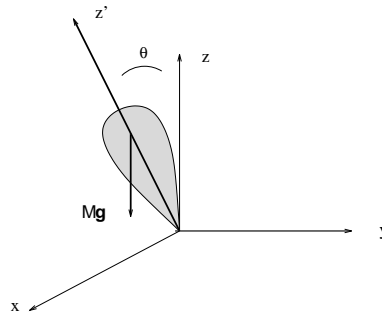


FIGURE 2.8 – Toupie soumise à son poids

En allant dans E , on tire une équation différentielle pour le mouvement de nutation $\vartheta(t)$

$$E = \frac{\Theta'_1}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta)^2}{2\Theta'_1 \sin^2 \vartheta} + \frac{p_\psi^2}{2\Theta'_3} + Mgl \cos \vartheta . \quad (2.90)$$

10. Les grandeurs E et p_φ sont aussi des intégrales premières pour le gyroscope asymétrique, par contre la grandeur p_ψ ne l'est que pour la toupie.

On simplifie cette équation en introduisant la nouvelle variable $u = \cos \vartheta$ et en définissant les constantes

$$a = \frac{p_\varphi}{\Theta'_1} \quad b = \frac{p_\psi}{\Theta'_1} \quad \alpha = \frac{1}{\Theta'_1} \left(2E - \frac{p_\psi^2}{\Theta'_3} \right) \quad \beta = \frac{2Mgl}{\Theta'_1} \quad (2.91)$$

pour aboutir à l'équation différentielle unidimensionnelle

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + V(u) = 0 \quad (2.92)$$

de potentiel

$$2V(u) = (a - bu)^2 - (\alpha - \beta u)(1 - u^2) . \quad (2.93)$$

Connaissant $u(t)$, on peut, à partir des équations (2.89), déterminer par intégration $\varphi(t)$ et $\psi(t)$. Par ailleurs, l'équation (2.92) possède une structure simple qui permet une analyse qualitative du mouvement de la toupie par l'étude du portrait de phase *i.e.* du comportement de la vitesse en fonction de l'énergie potentielle.

2.6.2 Équations d'Euler

Comme l'énergie cinétique, le moment cinétique \mathbf{L} du corps rigide peut être exprimé en fonction du tenseur d'inertie et de la vitesse angulaire. Pour un corps rigide en rotation, le moment cinétique \mathbf{L} exprimé dans les coordonnées de O est donné par

$$\mathbf{L} = \Theta \boldsymbol{\omega} .$$

On remarque que pour un tenseur d'inertie Θ quelconque le moment cinétique et la vitesse angulaire n'ont pas la même direction. Dans les coordonnées de O' , on a de même

$$\mathbf{L}' = \Theta' \boldsymbol{\omega}' . \quad (2.94)$$

La relation entre ces deux formules est donnée par

$$\mathbf{L} = RR^T \Theta RR^T \boldsymbol{\omega} = R \Theta' \boldsymbol{\omega}' . \quad (2.95)$$

Si l'on admet que sur le corps rigide agit la force extérieure \mathbf{F} , un moment de force $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ apparaît et le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} . \quad (2.96)$$

À l'aide de la formule de composition des vitesses pour des référentiels accélérés (voir cours d'*Introduction à la physique théorique*)

$$\dot{\mathbf{L}} = R \left[\dot{\mathbf{L}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}' \right] ,$$

on arrive à l'expression des équations d'Euler

$$\dot{\mathbf{L}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}' = \mathbf{M}'$$

que l'on écrit en fonction des moments d'inertie et des vitesses angulaires

$$\Theta' \dot{\boldsymbol{\omega}}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\Theta' \boldsymbol{\omega}') = \mathbf{M}' . \quad (2.97)$$

En passant aux axes principaux et en écrivant (2.97) en composantes, on obtient les **équations d'Euler**

$$\begin{aligned}\Theta'_1 \dot{\omega}'_1 + (\Theta'_3 - \Theta'_2) \omega'_2 \omega'_3 &= M'_1 \\ \Theta'_2 \dot{\omega}'_2 + (\Theta'_1 - \Theta'_3) \omega'_1 \omega'_3 &= M'_2 \\ \Theta'_3 \dot{\omega}'_3 + (\Theta'_2 - \Theta'_1) \omega'_1 \omega'_2 &= M'_3 .\end{aligned}\tag{2.98}$$

C'est un système d'équations non linéaires. On peut montrer que ces équations sont équivalentes aux équations de Lagrange.

Chapitre 3

Mécanique de Hamilton

La mécanique de Lagrange permet de représenter un système physique de n degrés de liberté à l'aide de la fonction de Lagrange

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (3.1)$$

qui dépend des coordonnées généralisées q_j et des vitesses généralisées \dot{q}_j . Le mouvement est décrit par n équations différentielles du 2ème ordre (2.31), les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Les applications que l'on a rencontrées, nous ont montré que la mécanique de Lagrange offre un formalisme puissant pour la résolution des problèmes de mécanique. Toutefois, dans certaines situations physiques, il est utile de remplacer les vitesses généralisées \dot{q}_j par les **impulsions généralisées**

$$p_j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q, \dot{q}, t) \quad (3.3)$$

déjà définies en (2.32). Si cette relation est inversible *i.e.* si elle possède la propriété de déterminant

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right| \neq 0 ,$$

il est possible de déterminer les vitesses $\dot{q}_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ en fonction des impulsions généralisées. Alors la fonction de Lagrange $L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ peut être remplacée par une nouvelle fonction appelée fonction de Hamilton $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$. Remarquons que dans tous les exemples physiques que l'on connaît, l'inversion de (3.3) est simple puisqu'il s'agit en fait d'une relation linéaire, la fonction de Lagrange $L = T - V$ étant au plus une fonction quadratique des \dot{q}_j . La fonction de Hamilton va nous conduire à un nouveau formalisme de la mécanique classique et couvrir un champ d'application plus large :

- a) Le formalisme hamiltonien fournit en principe une méthode systématique pour déterminer les intégrales premières d'un problème donné.
- b) La mécanique de Hamilton devient le formalisme de base de la mécanique quantique et de la mécanique statistique.

3.1 Fonction et équations de Hamilton

Le passage des vitesses généralisées \dot{q}_j aux impulsions généralisées p_j est donné par une **transformation de Legendre**¹ qui nous permet de définir la **fonction de Hamilton**

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j p_j - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (3.4)$$

où les $\dot{q}_j(q, p, t)$ sont données par l'inversion de (3.3). Dans la fonction de Hamilton, on a remplacé les variables indépendantes (q, \dot{q}) par les (q, p) appelées **variables canoniques**. La fonction de Hamilton obéit à de nouvelles équations que l'on peut établir en calculant les différentielles totales des deux membres de (3.4). En tenant compte des arguments des fonctions $H(q_j, p_j, t)$, $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ et de la définition de la fonction de Hamilton, on obtient

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= d \left(\sum_{j=1}^n \dot{q}_j p_j \right) - dL \\ &= \sum_{j=1}^n (p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \end{aligned} \quad (3.5)$$

En raison de la définition des impulsions généralisées, le premier terme et le quatrième terme de (3.5) s'annulent. Puis en comparant les coefficients des mêmes accroissements dp_j, dq_j, dt dans la première et la troisième équation (3.5) et en utilisant les équations de Lagrange, on arrive aux **équations de Hamilton** ou **équations canoniques**

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (3.6)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n . \quad (3.7)$$

Ces équations forment un système de $2n$ équations différentielles du 1er ordre qui remplacent les n équations du 2ème ordre de Lagrange. De l'expression (3.5), on tire aussi la

1. On considère une fonction $f(x)$ deux fois différentiable et telle que $d^2 f/dx^2 \neq 0$. On définit sa dérivée par $z = df/dx$. La transformée de Legendre de $f(x)$ est une fonction de z définie par

$$(\mathcal{L}f)(z) = xz - f(x) .$$

Elle peut aussi être définie avec le signe moins. Il s'agit bien d'une fonction de z puisque

$$d(\mathcal{L}f) = dx z + x dz - \frac{df}{dx} dx = x dz .$$

L'inverse est donné par la transformée de Legendre de $\mathcal{L}f$

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}f)(x) = z \frac{d(\mathcal{L}f)}{dz} - (\mathcal{L}f)(z) = zx - xz + f(x) = f(x) .$$

La transformation de Legendre permet aussi de définir, à partir de l'énergie interne $U(S, V, N)$, les fonctions thermodynamiques telles que l'énergie libre $F(T, V, N)$, l'enthalpie $H(S, p, N)$ ou le potentiel de Gibbs $G(T, p, N)$. Elle peut évidemment être généralisée à des fonctions de plusieurs variables.

relation

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.8)$$

En calculant la dérivée totale

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.9)$$

et en utilisant des équations canoniques, on a aussi

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.10)$$

On en conclut que H est une intégrale première si H ou L ne dépendent pas explicitement du temps t .

Les équations canoniques que l'on vient d'établir peuvent aussi être déduites par un calcul direct des dérivées de H par rapport à p_k et q_k

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} p_j + \dot{q}_j \delta_{jk} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} \right] = \dot{q}_k \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_k} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} p_j - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = -\dot{p}_k \end{aligned} \quad (3.12)$$

Lors du calcul de ces dérivées partielles, il faut prendre garde à la dépendance en (q, p) de chacun des termes de la fonction H définie en (3.4). En outre, on utilise la définition des p_j (3.3) et les équations de Lagrange.

En généra, H constante du mouvement et H énergie totale sont deux choses différentes. Cependant, pour un système scléronome avec force conservative, la fonction de Hamilton et l'énergie mécanique sont égales. En effet, pour $L = m\dot{\mathbf{r}}^2/2 - V(\mathbf{r})$, le calcul donne

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - T + V \\ &= m\dot{\mathbf{r}} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V \\ &= m\dot{\mathbf{r}} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j - T + V \\ &= m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - T + V \\ &= T + V = E \end{aligned} \quad (3.13)$$

où l'on a utilisé la relation (2.21).

Exemples : Fonctions de Hamilton et équations de Hamilton

- a) Particule de masse m libre. Pour $L = m\dot{\mathbf{r}}^2/2$, les impulsions généralisées (3.3) en coordonnées cartésiennes deviennent

$$p_j = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} \left(\frac{1}{2} m \sum_{k=1}^3 \dot{x}_k^2 \right) = m\dot{x}_j$$

et par conséquent permettent de calculer la fonction de Hamilton

$$H(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j p_j - \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j^2 = \sum_{j=1}^3 \frac{p_j}{m} p_j - \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^3 \left(\frac{p_j}{m} \right)^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} .$$

On dérive aussi les équations canoniques

$$\dot{x}_j = \frac{p_j}{m} \quad (3.14)$$

$$\dot{p}_j = 0 \quad j = 1, \dots, 3 . \quad (3.15)$$

- b) Particule de masse m dans le potentiel $V(\mathbf{r})$. Le calcul donne la fonction de Hamilton

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (3.16)$$

et les équations canoniques

$$\dot{x}_j = \frac{p_j}{m} \quad (3.17)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial}{\partial x_j} V(\mathbf{r}) \quad j = 1, \dots, 3 . \quad (3.18)$$

- c) Particule de masse m dans \mathbb{R}^2 , soumise au potentiel $V(\varrho)$, $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le calcul donne (exercice) la fonction de Hamilton

$$H(\varrho, p_\varrho, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(p_\varrho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2} \right) + V(\varrho) \quad (3.19)$$

et les équations canoniques

$$\dot{\varrho} = \frac{p_\varrho}{m} \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\varrho^2} \quad (3.20)$$

$$\dot{p}_\varrho = \frac{p_\varphi^2}{m\varrho^3} - \frac{\partial}{\partial \varrho} V(\varrho) \quad \dot{p}_\varphi = 0 . \quad (3.21)$$

- d) Particule de masse m dans \mathbb{R}^3 soumise au potentiel $V(r)$. Le calcul donne (exercice) la fonction de Hamilton

$$H(r, \vartheta, p_r, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r) \quad (3.22)$$

et les équations canoniques de la même manière que dans les exemples ci-dessus.

Une fonction $f(q, p, t)$ s'appelle **variable dynamique**. Les grandeurs telles que la fonction de Hamilton $H(q, p, t)$, les coordonnées q et p sont des exemples de variables dynamiques. Une coordonnée généralisée q_j qui n'apparaît pas dans H est appelée **variable cyclique**. Dans ce cas, en vertu des équations canoniques (3.7), l'impulsion généralisée p_j est conservée. Un système physique qui peut être représenté par une fonction de Hamilton est appelé **système canonique** ou système hamiltonien.

3.2 Crochets de Poisson

Comme on l'a souvent mentionné dans ce cours, une des démarches importantes de la mécanique classique est la recherche des intégrales premières ou grandeurs conservées, *i.e.* des grandeurs f telles que

$$\frac{d}{dt}f(q_j, p_j, t) = 0 . \quad (3.23)$$

A l'aide des équations canoniques (3.6), (3.7), la dérivée totale de f par rapport à t devient

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} . \end{aligned}$$

Alors, en définissant le **crochet de Poisson**

$$\{H, f\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) , \quad (3.24)$$

on obtient la formule

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t} . \quad (3.25)$$

On voit donc que la variable dynamique f est une intégrale première si $\partial f/\partial t = 0$ et si $\{H, f\} = 0$. Si $\partial H/\partial t = 0$, on a en particulier

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0 . \quad (3.26)$$

Dans ce cas, H est une intégrale première comme nous le savions déjà.

Pour toute variable dynamique f, g, h , on vérifie (exercice) les propriétés suivantes du crochet de Poisson

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{f, c\} &= 0 \quad c : \text{nombre.} \\ \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \\ \{f_1 f_2, g\} &= f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} . \end{aligned}$$

On vérifie aussi l'**identité de Jacobi**

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 . \quad (3.27)$$

La vérification par un calcul direct est très longue et fastidieuse. Pour une preuve plus élégante, on se réfère au livre de Landau et Lifchitz. Muni du crochet de Poisson comme produit interne, l'ensemble des variables dynamiques forme une algèbre de Lie (*i.e.* un

espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire alternée). Lorsque l'une des variables dynamiques est p_k ou q_k , on obtient les relations

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \quad \{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}$$

et en particulier, les **relations canoniques**

$$\{q_j, q_k\} = 0 \quad \{p_j, p_k\} = 0 \quad \{p_j, q_k\} = \delta_{jk} . \quad (3.28)$$

Les crochets de Poisson permettent de déterminer des intégrales premières aussi à partir des deux théorèmes suivants.

Th. 3.1 Théorème de Poisson

Si les variables dynamiques f et g sont des intégrales premières, alors le crochet de Poisson $\{f, g\}$ est aussi une intégrale première.

La vérification utilise (3.25) et les propriétés du crochet de Poisson

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f, g\} &= \{H, \{f, g\}\} + \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} \\ &= -\{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \\ &= \left\{ f, \{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \left\{ \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} \\ &= \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\} + \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} . \end{aligned}$$

Comme f, g sont des intégrales premières *i.e.* $df/dt = 0$ et $dg/dt = 0$, on obtient le résultat. Considérons un autre théorème intéressant.

Th. 3.2 Théorème des variables groupées

Soit la fonction de Hamilton

$$H(q_j, p_j; f(q_k, p_k), t) .$$

Alors, si les ensembles de variables $\{q_j, p_j; j = 1, \dots, n_1\}$ et $\{q_k, p_k; k = 1, \dots, n_2\}$ avec $n = n_1 + n_2$ sont disjoints, la variable dynamique $f(q_k, p_k)$ est une intégrale première.

La vérification est simple. Avec $\partial f / \partial t = 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \{H, f\} = \sum_{k=1}^{n_2} \left[\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right] \\ &= \frac{\partial H}{\partial f} \sum_{k=1}^{n_2} \left[\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right] = 0 , \end{aligned}$$

puisqu'il suffit de considérer la somme où $\partial f / \partial q_k \neq 0$ et $\partial f / \partial p_k \neq 0$ pour $k = 1, \dots, n_2$.

Exemples : Calcul et utilisation des crochets de Poisson.

a) Le calcul d'un crochet de Poisson quelconque peut être effectué à l'aide des relations canoniques (3.28) et des propriétés du crochet. Voici quelques exemples :

$$\begin{aligned}
& - \{L_x, y\} = -z \quad , \\
& \{yp_z - zp_y, y\} = y\{p_z, y\} + \{y, y\}p_z - z\{p_y, y\} - \{z, y\}p_y = -z \\
& - \{L_x, p_y\} = -p_z \quad , \\
& \{yp_z - zp_y, p_y\} = y\{p_z, p_y\} + \{y, p_y\}p_z - z\{p_y, p_y\} - \{z, p_y\}p_y = -p_z \\
& - \{L_x, L_y\} = -L_z \quad , \\
& \{L_x, zp_x - xp_z\} = z\{L_x, p_x\} + \{L_x, z\}p_x - x\{L_x, p_z\} - \{L_x, x\}p_z = yp_x - xp_y \\
& - \{\mathbf{L}^2, L_z\} = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Pour les calculs en coordonnées cartésiennes, il est possible d'utiliser une notation compacte à l'aide du symbole

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk \text{ permutation paire de } 123 \\ -1 & ijk \text{ permutation impaire de } 123 \\ 0 & \text{au moins 2 indices égaux} \end{cases} \quad (3.29)$$

Alors

$$L_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j p_k \quad \{L_i, L_j\} = - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k \quad . \quad (3.30)$$

Il est utile de connaître la relation

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad . \quad (3.31)$$

qui se vérifie aisément à partir de la définition des symboles.

b) Intégrales premières du système de masse m dans le potentiel $V(|\mathbf{r}|)$.

Comme le potentiel ne dépend que de la norme de \mathbf{r} , nous choisissons les coordonnées sphériques. Dans ce cas la fonction de Hamilton prend la forme (3.22)

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} \right) + V(r) \quad (3.32)$$

où \mathbf{L} est le moment cinétique

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^2 &= (\mathbf{r} \times \mathbf{p})^2 = m^2 r^4 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \\
&= p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \quad . \quad (3.33)
\end{aligned}$$

A l'aide des théorèmes que l'on vient de citer, on peut trouver les intégrales premières suivantes :

- H est intégrale première, puisque $\partial H / \partial t = 0$ donne $dH/dt = \{H, H\} = 0$.
- $p_\varphi = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = L_z$ est une intégrale première, puisque φ est une variable cyclique i.e. $\partial H / \partial \varphi = 0$.
- $L^2(\vartheta, p_\vartheta, p_\varphi)$ est une intégrale première, puisque les ensembles comprenant les variables radiales et angulaires $\{r, p_r\}$ et $\{\vartheta, p_\vartheta, p_\varphi\}$ sont disjoints.
- $\{\mathbf{L}^2, L_z\}$ est une intégrale première, puisque \mathbf{L}^2 et L_z le sont (théorème de Poisson). En fait, $\{\mathbf{L}^2, L_z\} = 0$.

3.3 Transformations canoniques

La mécanique de Lagrange est invariante sous les transformations de la forme $q' = q'(q, t)$ appelées **transformations ponctuelles**². Dans la mécanique de Hamilton qui utilise les variables canoniques q et p , on introduit une classe de transformations beaucoup plus grande représentée par le difféomorphisme

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \longmapsto (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$$

noté

$$Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \quad (3.34)$$

$$P_j = P_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) . \quad (3.35)$$

Une telle transformation est appelée **transformation canonique** si elle laisse les équations canoniques inchangées

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j} \quad (3.36)$$

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j} \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{L}}{\partial t} \quad (3.37)$$

où $\bar{H}(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n, t)$ est la fonction de Hamilton dans les nouvelles coordonnées. On peut aussi caractériser les transformations canoniques à l'aide des deux propositions suivantes que l'on donne sans preuve.

Th. 3.3 *Une transformation est canonique si et seulement si elle conserve les relations canoniques*

$$\{Q_j, Q_k\} = 0 \quad \{P_j, P_k\} = 0 \quad \{P_j, Q_k\} = \delta_{jk} . \quad (3.38)$$

En conséquence, on peut montrer (exercice) que le crochet de Poisson de deux variables dynamiques f, g est invariant par transformation canonique

$$\{f, g\}_{qp} = \{f', g'\}_{QP} \quad (3.39)$$

où f', g' sont les variables dynamiques dans les nouvelles variables Q, P .

Th. 3.4 *Une transformation est canonique si et seulement si il existe une fonction différentiable $S(q, p, Q, P, t)$ telle que*

$$\left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H \right) - \left(\sum_{j=1}^n P_j \dot{Q}_j - \bar{H} \right) = \frac{dS}{dt} \quad (3.40)$$

i.e. si L et \bar{L} ne diffèrent que d'une différentielle totale.

La condition suffisante est facile à vérifier puisque la variation à extrémités fixes de la différentielle totale donne immédiatement les équations de Hamilton. La preuve de la condition nécessaire (existence) est beaucoup plus délicate.

2. Le passage aux coordonnées sphériques constitue une transformation ponctuelle.

3.4 Fonctions génératrices

La fonction S définie en (3.40) dépend du temps et des 4 multiplats de variables q, p, Q, P dont deux seulement sont indépendants. D'où les quatre choix non triviaux possibles

$$S_1(q, Q, t) \quad S_2(q, P, t) \quad S_3(p, Q, t) \quad S_4(p, P, t) . \quad (3.41)$$

Ces fonctions s'appellent **fonctions génératrices** de la transformation canonique. On en choisit une suivant la transformation que l'on veut considérer. Analysons les deux cas les plus courants.

a) Fonction génératrice $S_1(q, Q, t)$

En regardant le membre de gauche de la relation (3.40), on conclut que la génératrice $S_1(q, Q, t)$ est le premier choix naturel que l'on peut faire. Le calcul donne

$$\left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H \right) - \left(\sum_{j=1}^n P_j \dot{Q}_j - \bar{H} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial S_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial S_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) + \frac{\partial S_1}{\partial t} .$$

En identifiant les coefficients de \dot{q}_j et \dot{Q}_j , on déduit les **équations de la transformation canonique**

$$\begin{aligned} p_j &= \partial S_1 / \partial q_j & \bar{H} &= H + \partial S_1 / \partial t . \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$P_j = -\partial S_1 / \partial Q_j$$

Pour une fonction génératrice $S_1(q, Q, t)$ donnée, ces équations permettent par dérivation de déterminer la transformation canonique. Réciproquement, pour une transformation canonique donnée, elles permettent par intégration de trouver la fonction génératrice. Examinons le rôle des équation de la transformation canonique à travers un exemple unidimensionnel simple. La fonction génératrice $S_1(q, Q) = -Q/q$ implique avec (3.42) la transformation canonique

$$Q = pq^2 \quad P = 1/q . \quad (3.43)$$

Réciproquement, étant donnée la transformation canonique (3.43), l'intégration de la première équation (3.42) conduit à l'expression

$$S_1(q, Q) = \int p \, dq = \int \frac{Q}{q^2} \, dq = -\frac{Q}{q} + A(Q) \quad (3.44)$$

qui insérée dans la deuxième équation donne

$$\frac{\partial S_1}{\partial Q} = -\frac{1}{q} + \frac{dA}{dQ} = -P . \quad (3.45)$$

On en déduit $dA/dQ = 0$ et donc $S_1 = -Q/q + \text{const}$. La constante additionnelle n'a pas d'importance puisque S_1 intervient toujours sous forme de dérivée.

b) Fonction génératrice $S_2(q, P, t)$

De la même manière que ci-dessus, on peut établir les équations de la transformation liées à la génératrice $S_2(q, P, t)$. Comme $P_j = \partial[-S_1]/\partial Q_j$, on peut relier les fonctions S_2 et S_1 à l'aide de la transformation de Legendre de la fonction $[-S_1]$

$$S_2(q, P, t) := \sum_{j=1}^n Q_j P_j - [-S_1(q, Q, t)] . \quad (3.46)$$

Alors, la relation (3.40) devient

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H \right) - \left(\sum_{j=1}^n P_j \dot{Q}_j - \bar{H} \right) &= \frac{d}{dt} S_1(q, Q, t) \\ &= - \sum_{j=1}^n \dot{Q}_j P_j - \sum_{j=1}^n Q_j \dot{P}_j + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial S_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial S_2}{\partial P_j} \dot{P}_j \right) + \frac{\partial S_2}{\partial t} . \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de \dot{q}_j et \dot{P}_j , on déduit les équations de la transformation

$$\begin{aligned} p_j &= \partial S_2 / \partial q_j & \bar{H} &= H + \partial S_2 / \partial t . \\ Q_j &= \partial S_2 / \partial P_j \end{aligned} \quad (3.47)$$

Comme exemple d'application, on vérifie immédiatement que la fonction

$$S_2(q, P, t) := \sum_{j=1}^n P_j q_j \quad (3.48)$$

est génératrice de la transformation canonique identique

$$Q_j = q_j \quad P_j = p_j . \quad (3.49)$$

De la même manière, on pourrait définir les autres fonctions génératrices qui, comme on l'a vu, sont toujours définies à une constante près. Dans la suite de ce chapitre, on se restreindra à la fonction génératrice $S_1(q, Q, t)$.

3.5 Théorie de Hamilton-Jacobi

Chacune des formulations de la mécanique montre que le calcul des trajectoires d'un système peut être simplifié si l'on connaît des constantes du mouvement. En mécanique de Newton, ce sont les théorèmes de conservation (conservation de l'énergie, du moment cinétique ou de la quantité de mouvement) qui fournissent des outils précieux pour déterminer ces constantes. En mécanique de Lagrange, c'est le théorème de Noether qui donne accès aux grandeurs conservées à partir des symétries du système. En mécanique de Hamilton, ce sont les variables cycliques et les crochets de Poisson qui offrent une formulation simple pour découvrir des intégrales premières. Enfin, comme on va le voir dans cette section, la théorie de Hamilton-Jacobi établit une démarche générale qui permet de trouver toutes les intégrales premières d'un système donné.

On considère la transformation canonique

$$Q_j = Q_j(q, p, t) \quad (3.50)$$

$$P_j = P_j(q, p, t) \quad (3.51)$$

de génératrice $S(q, Q, t)$ satisfaisant les équations de la transformation

$$\begin{aligned} p_j &= \partial S / \partial q_j & \bar{H}(Q, P, t) &= H(q, p, t) + \partial S / \partial t . \\ P_j &= -\partial S / \partial Q_j \end{aligned} \quad (3.52)$$

La fonction de Hamilton $\overline{H}(Q, P, t)$ obéit aux équations canoniques

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_k} \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k} . \quad (3.53)$$

Existe-t-il une transformation canonique particulière qui fournit toutes les intégrales premières du système considéré? La réponse est donnée par le choix de la transformation canonique élémentaire

$$\begin{aligned} Q_j &= \text{const} = \alpha_j \\ P_j &= \text{const} = \beta_j \end{aligned} . \quad (3.54)$$

qui fournit effectivement $2n$ intégrales premières α_j, β_j . En regardant les équations canoniques (3.53), on remarque que ce choix peut être satisfait de manière triviale en exigeant

$$\overline{H} = 0 . \quad (3.55)$$

Avec les équations de la transformation (3.52), cette condition fournit l'**équation de Hamilton-Jacobi**

$$H \left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 , \quad (3.56)$$

pour la fonction génératrice $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$ et aussi les équations algébriques

$$\beta_j = -\frac{\partial}{\partial \alpha_j} S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) \quad j = 1, \dots, n . \quad (3.57)$$

Alors, si l'on connaît la solution $S(q, \alpha, t)$ de l'équation de Hamilton-Jacobi, on peut déterminer les trajectoires en résolvant le système d'équations algébriques non linéaires (3.57). L'inversion de ce système est possible si

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_k} \right| \neq 0$$

et sa solution donne les trajectoires en fonction de $2n$ constantes et du temps

$$q_j(t) = q_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t) \quad j = 1, \dots, n . \quad (3.58)$$

Cette démarche fonctionne en principe très bien, mais entraîne une difficulté majeure qui réside dans la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi, équation aux dérivées partielles, non linéaire et soumise à des conditions initiales. La recherche des solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi porte sur une classe de solutions de la forme

$$S = F(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + A \quad (3.59)$$

où A est une constante additive puisque S apparaît uniquement comme dérivée. La solution (3.59) qui contient autant de constantes arbitraires α_j qu'il y a de variables indépendantes q_j s'appelle **intégrale complète**. Dans le cas fréquent où $\partial H / \partial t = 0$, on montre qu'il est possible de décomposer S en deux termes

$$S = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E) - Et + A \quad (3.60)$$

où l'énergie E a été choisie comme l'une des constantes d'intégration. Alors l'équation de Hamilton-Jacobi (3.56) devient

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) = E. \quad (3.61)$$

De manière plus générale, lorsque l'équation ci-dessus peut être écrite sous la forme

$$h\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right), q_2, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right] = 0, \quad (3.62)$$

la variable q_1 s'appelle **séparable**. Alors, l'Ansatz de séparation

$$W(q_1, \dots, q_n) = W_1(q_1) + W'(q_2, \dots, q_n) \quad (3.63)$$

conduit aux deux équations

$$f_1\left(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}\right) = \alpha_1 \quad (3.64)$$

$$h\left(\alpha_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial W'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_n}\right) = 0. \quad (3.65)$$

La première de ces deux équations fournit par intégration la fonction $W_1(q_1; \alpha_1)$. Le problème est complètement séparable si le procédé peut être poursuivi jusqu'au bout. Alors, par intégration des n équations on obtient la solution complète de l'équation de Hamilton-Jacobi sous la forme d'une somme de n fonctions à une variable

$$W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E) = W_1(q_1; \alpha_1, E) + W_2(q_2; \alpha_1, \alpha_2, E) + \dots + W_n(q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n - 1, E). \quad (3.66)$$

La séparabilité repose évidemment sur un bon choix des coordonnées. Pour qu'il y ait séparation complète des variables, le système doit être intégrable. La réciproque n'est pas vraie. Un système hamiltonien à n degrés de liberté est **intégrable** s'il admet au maximum n intégrales premières. On montre qu'un système hamiltonien à n degrés de liberté peut avoir au plus $2n - 1$ constantes du mouvement indépendantes.

Exemples : Equations de Hamilton-Jacobi et intégrales complètes

a) Point matériel libre dans \mathbb{R}^3

De la fonction de Hamilton $H = \mathbf{p}^2/2m = \sum_{j=1}^3 (p_j^2)/2m$, on tire l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.67)$$

Comme $\partial H/\partial t = 0$, on a

$$\frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)^2 = E. \quad (3.68)$$

L'intégrale complète peut être mise sous une forme complètement séparée

$$S = \sum_{j=1}^3 W_j(x_j) - Et + A \quad (3.69)$$

et conduit à l'équation

$$\frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{dW_j}{dx_j} \right)^2 = E \quad (3.70)$$

valable pour tout x_j . On en conclut que

$$\left(\frac{dW_j}{dx_j} \right)^2 = \text{const} \equiv \alpha_j^2 \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.71)$$

avec $\frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 = E$. L'intégration de (3.71) donne

$$S(\mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2, E, t) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j x_j - Et + A . \quad (3.72)$$

On remarque que les α_j sont des impulsions puisque l'on retrouve la solution connue $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et$. En introduisant l'énergie E fonction des α_j , les équations algébriques (3.57) deviennent

$$\beta_j = -x_j + \frac{\alpha_j}{m} t \quad j = 1, 2, 3 . \quad (3.73)$$

Par inversion, on déduit le mouvement rectiligne uniforme bien connu

$$x_j(t) = \frac{\alpha_j}{m} t - \beta_j \quad j = 1, 2, 3 . \quad (3.74)$$

b) Oscillateur harmonique unidimensionnel

De la fonction $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$, on tire l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (3.75)$$

qui pour $\partial H/\partial t = 0$ devient

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = E . \quad (3.76)$$

L'intégrale complète s'écrit

$$S(x; E, t) = W(x) - Et + A . \quad (3.77)$$

L'intégration de l'équation (3.76) donne la fonction

$$W = m\omega \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x'^2} dx' \quad (3.78)$$

et les équations algébriques (3.57) deviennent

$$\beta = -\frac{dS}{dE} = -m\omega \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{\frac{2}{m\omega^2}}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x'^2}} + t \quad (3.79)$$

où $a^2 = 2E/m\omega^2$. En définissant la constante t_0 , le calcul de l'intégrale et l'inversion fournissent le mouvement harmonique bien connu

$$x(t) = a \sin \omega(t - t_0) . \quad (3.80)$$

3.6 Espace des phases

L'espace à $2n$ dimensions, engendré par les coordonnées

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \quad (3.81)$$

est appelé **espace des phases**. Sur un volume Γ de cet espace, on montre que l'intégrale

$$I = \int_{\Gamma} dq_1 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n \quad (3.82)$$

est invariante par transformation canonique

$$Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \quad (3.83)$$

$$P_j = P_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \quad (3.84)$$

En effet, par transformation de coordonnées, l'intégrale I devient

$$\int_{\Gamma'} dQ_1 \cdots dQ_n dP_1 \cdots dP_n = \int_{\Gamma} |\det M| dq_1 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n \quad (3.85)$$

où M est la matrice de Jacobi de la transformation. Le déterminant de Jacobi est noté

$$\det M = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)}. \quad (3.86)$$

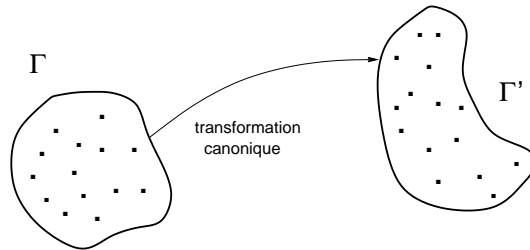


FIGURE 3.1 – Théorème de Liouville : dans l'espace des phases, le volume Γ change de forme mais reste constant

Alors, pour que l'intégrale soit invariante, il faut que $|\det M| = 1$. En utilisant les propriétés générales d'un déterminant, on peut voir que

$$\det M = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, P)} \bigg/ \frac{\partial(q, p)}{\partial(q, P)} = \frac{\partial(Q)}{\partial(q)} \bigg/ \frac{\partial(p)}{\partial(P)}.$$

Comme les équations (3.47) d'une transformation canonique fournissent la relation

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 S_2}{\partial q_k \partial P_j} = \frac{\partial^2 S_2}{\partial P_j \partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial P_j},$$

on obtient $|\det M| = 1$. Comme on le verra plus loin, une preuve plus élégante peut être donnée à l'aide des propriétés du groupe symplectique. On en conclut que dans un volume Γ de l'espace des phases, les points se déplacent dans le temps selon les équations

du mouvement. Au temps t , ces points occupent un certain espace dont la forme peut changer, mais dont le volume reste le même. C'est le **théorème de Liouville**. L'ensemble de ces points se comporte comme un liquide incompressible représenté sur FIG. 3.1.

Avec l'introduction de l'espace des phases, les coordonnées q_j et p_j peuvent être traitées sur le même plan d'égalité. Pour le voir, on définit le vecteur à $2n$ composantes

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{2n} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

par la correspondance

$$x_j = q_j \quad x_{j+n} = p_j \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.88)$$

En faisant de même avec les coordonnées $y_j = Q_j$ et $y_{j+n} = P_j$, $j = 1, \dots, n$, on obtient la transformation canonique indépendante de t

$$Y = Y(X). \quad (3.89)$$

A partir de I , matrice unité $n \times n$, on définit la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

qui jouit des propriétés $J^{-1} = -J = J^T$. Alors, la définition du vecteur

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \begin{bmatrix} \partial H / \partial x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial H / \partial x_{2n} \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

nous permet d'écrire les équations canoniques sous la forme

$$\dot{X} = J \frac{\partial H}{\partial X}. \quad (3.92)$$

La règle de dérivation en chaîne appliquée à la transformation (3.89) fournit l'expression

$$\dot{y}_j = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \dot{x}_k = \sum_{k=1}^{2n} M_{jk} \dot{x}_k \quad (3.93)$$

où l'on a introduit la matrice de Jacobi de la transformation canonique

$$(M_{jk}) = (\partial y_j / \partial x_k). \quad (3.94)$$

En notation bloc, l'expression (3.93) s'écrit

$$\dot{Y} = M \dot{X} = M J \frac{\partial H}{\partial X}. \quad (3.95)$$

Cette relation doit être exprimée dans les mêmes variables Y . Si l'on considère une transformation canonique ne dépendant pas explicitement de t , avec (3.42) on a

$$H(X) = \overline{H}(Y)$$

et ainsi

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \overline{H}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{2n} M_{kj} \frac{\partial \overline{H}}{\partial y_k}.$$

Alors, l'expression (3.95) devient

$$\dot{Y} = M\dot{X} = MJM^T \frac{\partial \overline{H}}{\partial Y}. \quad (3.96)$$

Comparée aux équations canoniques

$$\dot{Y} = J \frac{\partial \overline{H}}{\partial Y}, \quad (3.97)$$

elle fournit la relation

$$MJM^T = J \quad (3.98)$$

qui caractérise les matrices M . L'ensemble des matrices M qui satisfont cette relation³ forme le **groupe symplectique**

$$Sp_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ M / MJM^T = J \right\}. \quad (3.99)$$

Une des conséquences immédiates du groupe symplectique est de fournir la preuve de l'invariance du volume Γ par transformation canonique, puisque le calcul du déterminant de la relation (3.98) donne

$$\det[MJM^T] = (\det M)^2 \det J = \det J \quad (3.100)$$

et par conséquent $|\det M| = 1$.

3. Comme on le verra dans le chapitre 8, le groupe de Lorentz, dont les matrices Λ définissent les changements de référentiels dans l'espace-temps, est caractérisé par une relation similaire $\Lambda^T g \Lambda = g$ où g est le tenseur métrique.

Chapitre 4

Champ électromagnétique

L'électrodynamique repose sur les observations fondamentales formalisées par les lois de Coulomb, de Biot-Savart et de Faraday. Ces lois sont réunies dans les équations de Maxwell qui permettent en principe de calculer les champs électriques $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et magnétiques $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ pour des densités de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ et de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ données. En même temps, ces équations admettent des solutions d'ondes, les ondes électromagnétiques. Dans ce chapitre, nous allons rappeler le contenu des équations de Maxwell en discutant les propriétés des champs statiques $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ et leur extension dynamique par la loi de Faraday.

4.1 Electrostatique et magnétostatique

Si l'on se restreint au cas statique, les lois de **Coulomb** et de **Biot-Savart** fournissent, pour des densités de charge $\rho(\mathbf{r}')$ et de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ données, le **champ électrique** $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et le **champ d'induction magnétique** $\mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4.2)$$

L'intégration s'étend sur un volume V qui contient toutes les charges et tous les courants contribuant aux champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . Nous pouvons donc supposer que ρ et \mathbf{j} s'annulent sur le bord ∂V . A l'aide de l'identité

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (4.3)$$

il est possible d'écrire le champ électrique sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad (4.4)$$

où l'on a défini la fonction $\Phi(\mathbf{r})$ appelée **potentiel scalaire**

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.5)$$

D'une manière analogue, les identités

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.6)$$

nous permettent d'écrire l'induction magnétique

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (4.7)$$

où l'on a défini le champ $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ appelé **potentiel vecteur**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.8)$$

En raison des propriétés du rotationnel et de la divergence, les équations (4.4) et (4.7) fournissent immédiatement les relations

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.10)$$

qui signifient que la circulation du champ électrique et le flux du champ d'induction magnétique sont nuls, au moins dans le cas statique.

D'autre part, l'application de la divergence à $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (4.4) fournit la relation¹

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \rho(\mathbf{r}') \quad (4.11)$$

qui contient l'expression singulière $\nabla^2 (1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Cette expression s'annule pour $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0, \quad (4.12)$$

mais nécessite une interprétation différente pour $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Notons d'abord que $\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla'^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$. Une intégration par parties et le changement de variable $\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ donnent

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3u \frac{1}{u} \nabla_u^2 \rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}). \quad (4.13)$$

Pour calculer cette intégrale nous définissons selon FIG. 4.1 le domaine d'intégration $D = V - B_\epsilon$ constitué d'un volume V quelconque évidé en son centre d'une boule B_ϵ de rayon ϵ que nous ferons tendre vers zéro à la fin des calculs. De plus, on admet que $\rho|_{\partial V} = 0$. Sur le domaine D on peut utiliser le théorème de Green² pour obtenir

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D d^3u \frac{1}{u} \nabla_u^2 \rho = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial D} \left(\frac{1}{u} \nabla_u \rho - \rho \nabla_u \frac{1}{u} \right) \cdot d\boldsymbol{\sigma}', \quad (4.14)$$

1. Comme $\rho|_{\partial V} = 0$, l'intégration peut s'étendre sur tout \mathbb{R}^3 . Dans tout changement de variable d'intégration, on gardera par conséquent la même notation pour V .

2. Pour des fonctions f et g définies sur V et deux fois différentiables, le théorème de Green fournit la relation

$$\int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) d^3r = \int_{\partial V} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\boldsymbol{\sigma}'.$$

Pour la preuve, il suffit d'appliquer le théorème de la divergence sur la fonction $\mathbf{F} = f \nabla g - g \nabla f$.

où on a tenu compte de la relation $\nabla_u^2 \left(\frac{1}{u}\right) = 0$, $u \in D$. Dans l'intégrale sur la surface $\partial D = \partial V - \partial B_\epsilon$, la fonction ρ et ses dérivées s'annulent sur ∂V . Seule l'intégrale sur ∂B_ϵ subsiste et, comme le montre FIG. 4.1, son élément de surface $d\sigma' = -(\mathbf{u}/u)d\sigma$ conduit à l'intégrale

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial B_\epsilon} \left(\frac{1}{u} \nabla_u \rho + \rho \frac{\mathbf{u}}{u^3} \right) \cdot \frac{\mathbf{u}}{u} d\sigma. \quad (4.15)$$

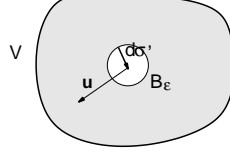


FIGURE 4.1 – Domaine d'intégration $D = V - B_\epsilon$

Avec la nouvelle variable $\mathbf{u} = \epsilon \mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$, $d\sigma = \epsilon^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, la limite $\epsilon \rightarrow 0$ du premier terme de (4.15) tend vers zéro puisque

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial B_\epsilon} \nabla_u \rho \cdot \frac{\mathbf{u}}{u^2} d\sigma \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{const}}{4\pi\epsilon_0} \epsilon \int_{|\mathbf{n}|=1} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0 \quad (4.16)$$

et la limite $\epsilon \rightarrow 0$ du deuxième terme donne

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial B_\epsilon} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}) \frac{1}{u^2} d\sigma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{|\mathbf{n}|=1} \rho(\epsilon \mathbf{n} + \mathbf{r}) \frac{1}{\epsilon^2} \epsilon^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \int_{|\mathbf{n}|=1} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

On obtient finalement l'équation du flux du champ électrique

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (4.18)$$

En comparant le membre de droite de (4.11) avec (4.18), on tire la relation intégrale

$$\int_V d^3 r' \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \rho(\mathbf{r}') = -4\pi \rho(\mathbf{r}) \quad (4.19)$$

qui fait correspondre à toute fonction $\rho(\mathbf{r}')$ sa valeur au point \mathbf{r} . C'est une fonctionnelle linéaire appelée distribution de Dirac (voir appendice 10.2). De manière abusive, on parle aussi de **fonction de Dirac** $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ et l'on note la fonctionnelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3 r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}) \quad (4.20)$$

pour aboutir à l'équation valable pour tout \mathbf{r} et pour tout \mathbf{r}'

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.21)$$

Pour le calcul du rotationnel du champ d'induction magnétique, on utilise l'identité

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (4.22)$$

Alors, l'application du rotationnel à $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (4.8) donne

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Le deuxième terme du membre de droite, contient la fonction de Dirac (4.19). Dans le premier terme, on passe à ∇' en changeant de signe, on utilise la règle de dérivation d'un produit de fonctions $\nabla' \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')] = [\nabla' \cdot \mathbf{v}] f + \mathbf{v} \cdot \nabla' f$ et on applique le théorème de la divergence pour obtenir

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\int_V d^3r' \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_V d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma}' \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_V d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

En utilisant la condition $\mathbf{j}|_{\partial V} = 0$ et l'équation de continuité statique $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, on voit que les deux premiers termes du membre de droite sont nuls. On obtient finalement l'**équation d'Ampère**

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (4.23)$$

Les équations (4.9), (4.18) caractérisent les phénomènes électrostatiques et les équations (4.10), (4.23) sont à la base de la magnétostatique. A l'aide de (4.4), on peut remplacer les deux équations de l'électrostatique par une seule équation,

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (4.24)$$

appelée **équation de Poisson**. Sa solution permet de calculer le champ électrique grâce à (4.4). D'une manière analogue, on peut remplacer les deux équations (4.10) et (4.23) de la magnétostatique par une seule équation. En utilisant l'identité (4.22) et en fixant la condition de jauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (4.25)$$

nous trouvons à l'aide de (4.7) et (4.23) de nouveau l'équation de Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (4.26)$$

La condition de Coulomb (4.25) se vérifie directement en appliquant la divergence à (4.8). De plus, la relation (4.7) montre que $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ n'est pas unique. En fait, en ajoutant $\nabla \chi(\mathbf{r})$ à \mathbf{A} avec $\chi(\mathbf{r})$ fonction arbitraire, le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ n'est pas modifié. Cette liberté du choix de jauge sera discutée plus tard de manière approfondie.

4.2 Equations de Maxwell

Pour décrire des phénomènes dépendant du temps, il faut modifier deux des quatre équations statiques. Premièrement, on doit tenir compte de la **loi de Faraday**

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \int_{\partial \Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.27)$$

qui met en relation la variation du flux d'induction magnétique à travers la surface Σ et la tension induite au bord $\partial\Sigma$. L'équation (4.9) prend alors la forme

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 . \quad (4.28)$$

Deuxièmement, on doit satisfaire l'équation de continuité,

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0 , \quad (4.29)$$

en ajoutant à (4.23), comme l'a fait Maxwell, le courant de déplacement $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, pour aboutir finalement à l'équation d'Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (4.30)$$

qui est consistante avec (4.29). Nous verrons plus tard que $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ est la **vitesse de propagation** des ondes électromagnétiques dans le vide. Finalement, avec (4.18), (4.30), (4.10) et (4.28), on arrive aux fameuses **équations de Maxwell**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad (\text{Coulomb}) \quad (4.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{Ampère}) \quad (4.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Gauss}) \quad (4.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday}). \quad (4.34)$$

Il existe une asymétrie évidente entre, d'un côté, les lois de Coulomb et Ampère, et, de l'autre côté, les lois de Gauss et Faraday. Cette asymétrie provient de la loi de Biot-Savart qui stipule qu'un champ magnétique (statique) est exclusivement dû à un courant électrique et non pas à des charges magnétiques. Du point de vue théorique, de telles charges magnétiques (ou monopoles) pourraient être introduites sans problèmes, en remplaçant les équations (4.33) et (4.34) par

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \mu_0 \rho_m , \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\mu_0 \mathbf{j}_m . \end{aligned}$$

Ces deux relations impliquent l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0 .$$

Des charges magnétiques n'ont encore jamais été observées (voir J. Schwinger et al., *Classical Electrodynamics*, Perseus 1998, chapitre 2), nous poserons dès lors $\rho_m = 0$, $\mathbf{j}_m = 0$.

Les équations de Maxwell impliquent la conservation de l'énergie. Un courant traversant un métal produit de la chaleur. L'expérience montre que pour des situations simples, la chaleur produite par une résistance, par unité de temps et de volume est égale à $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Ce terme peut donc être interprété comme la densité de travail fournie au système mécanique par le champ électromagnétique. Ce gain d'énergie du système matériel est balancé par

un terme que nous identifierons avec la perte d'énergie du champ électrique. A l'aide des équations de Maxwell et en utilisant la relation $c^2 = 1/(\mu_0\varepsilon_0)$, on obtient

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

On soustrait et regroupe les dérivées temporelles puis on utilise l'identité

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}),$$

pour obtenir l'équation

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (4.35)$$

Pour $\mathbf{j} = 0$ nous retrouvons une équation de continuité qui nous amène à définir la **densité d'énergie** du champ électromagnétique

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (4.36)$$

et la densité de flux d'énergie du champ électromagnétique, le **vecteur de Poynting**

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (4.37)$$

L'équation (4.35) fournit alors le **théorème de Poynting**

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \quad (4.38)$$

qui exprime la conservation de l'énergie totale. L'intégration sur V et sur t donne

$$\int_0^t dt' \int_V d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \int_V d^3r [u(\mathbf{r}, t) - u(\mathbf{r}, 0)] + \int_0^t dt' \int_{\partial V} d\sigma \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (4.39)$$

où le premier terme représente la chaleur de Joule, le deuxième le changement de l'énergie électromagnétique et le troisième l'énergie radiée à travers la surface du volume considéré. Notons encore que la densité d'énergie (4.36) peut aussi être définie dans le cadre de l'électrostatique et de la magnétostatique (voir Jackson).

Des arguments similaires sont utilisés pour obtenir une équation de continuité représentant la conservation d'impulsion. On trouve alors la **densité d'impulsion** du champ électromagnétique

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (4.40)$$

La grandeur $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$ est la **densité de moment cinétique** du champ électromagnétique. On peut aussi établir une équation de continuité pour cette grandeur.

4.3 Ondes électromagnétiques dans le vide

Étudions d'abord les équations de Maxwell dans le cas simple où ρ et \mathbf{j} sont nuls i.e. les charges et courants qui produisent les champs électriques et magnétiques se situent en dehors de la région considérée. Alors les équations de Maxwell s'écrivent

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.41)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 . \quad (4.42)$$

On découple ces équations en appliquant les dérivées $\partial/\partial t$ et $\nabla \times$. Alors, en utilisant l'identité $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$, on obtient les **équations d'onde**

$$\square \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \square \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4.43)$$

écrites à l'aide de l'**opérateur de d'Alembert**

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} . \quad (4.44)$$

Les équations (4.41), (4.42) sont linéaires. Alors si \mathbf{E}_1 , \mathbf{B}_1 et \mathbf{E}_2 , \mathbf{B}_2 sont deux solutions, les superpositions $\lambda_1 \mathbf{E}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2$ et $\gamma_1 \mathbf{B}_1 + \gamma_2 \mathbf{B}_2$ sont aussi des solutions.

4.3.1 Ondes planes

Une onde plane qui se propage parallèlement à l'axe z a la forme $f(z \pm ct)$. On vérifie facilement qu'une telle fonction satisfait l'équation de d'Alembert, $\square f = 0$. Pour une direction quelconque \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1$), on remplace z par $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$. Puisque les équations (4.43) sont linéaires, le théorème de Fourier (10.29) nous permet d'écrire la solution générale comme une superposition linéaire d'**ondes monochromatiques planes** de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (4.45)$$

où $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ sont en général complexes. Les solutions physiques sont les parties réelles³ de ces fonctions. En insérant (4.45) dans (4.43), on obtient la **relation de dispersion**

$$\omega = kc \quad (4.46)$$

entre la **fréquence** circulaire $\omega = 2\pi\nu$ et le module du **vecteur d'onde** \mathbf{k} . La **période** T et la **longueur d'onde** λ sont définies par

$$\nu = 1/T \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} \quad (4.47)$$

et fournissent une autre forme de la relation de dispersion

$$\lambda\nu = c . \quad (4.48)$$

3. Pour faciliter les calculs, on peut toujours prendre une fonction complexe à la place d'une fonction réelle et revenir à la partie réelle à la fin. Toutefois, si l'on veut éviter de mélanger partie réelle et partie imaginaire, on devra veiller à ne faire que des opérations linéaires.

Les équations de Maxwell impliquent les relations

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0 \\ \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{E}_0 &= -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 &= c \mathbf{B}_0 \times \mathbf{n} . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Si le vecteur \mathbf{E}_0 est réel, le champ électrique, *i.e.* la partie réelle de (4.45), est toujours parallèle à la direction du vecteur de polarisation défini par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|} . \quad (4.50)$$

La direction du champ magnétique est alors aussi fixée et les vecteurs $\mathbf{B}_0, \mathbf{n}, \mathbf{E}_0$ forment un trièdre droit constant. Dans ce cas, l'onde a une **polarisation linéaire**. De manière générale, une polarisation peut être exprimée à l'aide de deux **vecteurs de polarisation** orthonormaux, $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, et de deux nombres complexes E_1 et E_2 ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + E_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} . \quad (4.51)$$

Ces nombres complexes peuvent être représentés à l'aide d'une **amplitude** $|E|$ et d'une **phase** φ *i.e.* $E_1 = |E_1| e^{i\varphi_1}$ et $E_2 = |E_2| e^{i\varphi_2}$.

a) Si les nombres complexes E_1 et E_2 ont la même phase $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, l'onde est de nouveau polarisée linéairement et le champ électrique s'écrit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (|E_1| \boldsymbol{\varepsilon}_1 + |E_2| \boldsymbol{\varepsilon}_2) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi) . \quad (4.52)$$

b) Si les phases sont différentes $\varphi_1 \neq \varphi_2$, l'onde a une **polarisation elliptique**. Pour illustrer le phénomène, considérons le cas spécial d'une **polarisation circulaire** représentée par les amplitudes $|E_1| = |E_2| = E_0$ et par une différence de phase de $\pi/2$. Pour une direction de propagation parallèle à l'axe z et $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2$ parallèles aux axes x, y respectivement, une telle onde s'écrit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 (\mathbf{e}_x \pm i \mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (4.53)$$

et la solution physique, *i.e.* la partie réelle de (4.53) donne

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_y(\mathbf{r}, t) &= \mp E_0 \sin(kz - \omega t) . \end{aligned} \quad (4.54)$$

Pour z fixé ce vecteur décrit un cercle dans le plan xy en fonction du temps. Le champ magnétique calculé à l'aide de (4.49) vaut

$$\begin{aligned} B_x(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} E_y = \pm \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) \\ B_y(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} E_x = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Il est utile d'évaluer les densités d'énergie et d'impulsion données par (4.36) et (4.40). Pour le calcul de ces expressions quadratiques, il faut utiliser les solutions réelles (et non pas complexes). On trouve facilement

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon_0 E_0^2 \\ g_x &= g_y = 0 & g_z &= \frac{\varepsilon_0}{c} E_0^2 = \frac{u}{c} . \end{aligned} \quad (4.56)$$

D'où l'on tire la relation

$$\mathbf{g} = \frac{u}{\omega} \mathbf{k} . \quad (4.57)$$

4.3.2 Rayon de lumière

L'onde plane (4.45) s'étend sur tout l'espace avec une intensité moyenne constante. Le moment cinétique $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$ est alors mal défini puisqu'il n'existe pas d'origine naturelle pour le vecteur \mathbf{r} . L'exemple d'une onde avec extension finie perpendiculaire à la direction de propagation nous permet d'étudier un cas plus réaliste, pour lequel le moment cinétique pourra être calculé. Un tel rayon peut être représenté par l'expression

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_x(x, y), E_y(x, y), E_z(x, y)) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (B_x(x, y), B_y(x, y), B_z(x, y)) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (4.59)$$

où les fonctions $E_\alpha(x, y)$, $B_\alpha(x, y)$, $\alpha = x, y, z$, sont en général complexes. Ces champs doivent satisfaire les équations de Maxwell (4.41) et (4.42) où ρ et \mathbf{j} sont nuls. Ainsi, les deux équations $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{B}$ permettent d'éliminer les composantes des champs $E_z(x, y)$ et $B_z(x, y)$,

$$E_z = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right), \quad (4.60)$$

$$B_z = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right). \quad (4.61)$$

Nous supposons que les champs E_α et B_α varient très lentement sur l'échelle $1/k$, c.-à-d. le diamètre du rayon est beaucoup plus grand que la longueur d'onde λ . Nous pouvons alors négliger les deuxièmes dérivées $\partial^2 E_x / (\partial x \partial y)$, $\partial^2 B_x / (\partial x \partial y)$ etc. dans les équations d'Ampère et de Faraday, qui deviennent

$$\begin{aligned} \left(-ikB_y + \frac{i\omega}{c^2} E_x, \quad ikB_x + \frac{i\omega}{c^2} E_y, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\omega}{kc^2} \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right] \right) &\approx 0, \\ \left(-ikE_y - i\omega B_x, \quad ikE_x - i\omega B_y, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\omega}{k} \left[\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right] \right) &\approx 0. \end{aligned}$$

Ces six équations sont satisfaites pourvu que $\omega = ck$ (nous choisissons $\omega > 0$, $k > 0$) et que

$$B_x = -\frac{1}{c} E_y, \quad B_y = \frac{1}{c} E_x.$$

Alors la solution approximative est

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left(E_x(x, y), E_y(x, y), \frac{i}{k} \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right] \right) e^{i(kz - \omega t)} \quad (4.62)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \left(-E_y(x, y), E_x(x, y), -\frac{i}{k} \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \right) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (4.63)$$

Nous examinons maintenant les deux cas particuliers de polarisation circulaire

$$E_x(x, y) = E_0(x, y), \quad E_y(x, y) = \pm i E_0(x, y),$$

avec $E_0 \in \mathbb{R}$. On trouve

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left(1, \pm i, \frac{i}{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \right] \right) E_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (4.64)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mp \frac{i}{c} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (4.65)$$

Le vecteur de Poynting \mathbf{S} et la densité d'impulsion $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$ se calculent à partir des parties réelles

$$\mathbf{E}_r = \left(E_0 \cos \eta, \mp E_0 \sin \eta, \frac{1}{k} \left[-\sin \eta \frac{\partial E_0}{\partial x} \mp \cos \eta \frac{\partial E_0}{\partial y} \right] \right) \quad (4.66)$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{1}{c} \left(\pm E_0 \sin \eta, E_0 \cos \eta, \frac{1}{k} \left[\pm \cos \eta \frac{\partial E_0}{\partial x} - \sin \eta \frac{\partial E_0}{\partial y} \right] \right) \quad (4.67)$$

où $\eta = kz - \omega t$. Alors on obtient la densité d'impulsion

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \mathbf{E}_r \times \mathbf{B}_r = \frac{\varepsilon_0}{\omega} \left(\pm \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \mp \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}, k \right) E_0^2. \quad (4.68)$$

Mis à part les petites composantes g_x et g_y , cette expression est la même que celle trouvée pour l'onde plane (4.53). D'autre part ce sont les composantes g_x et g_y qui déterminent la densité du moment cinétique ℓ_z ,

$$\ell_z = xg_y - yg_x = \mp \frac{\varepsilon_0}{2\omega} \left(x \frac{\partial E_0^2}{\partial x} + y \frac{\partial E_0^2}{\partial y} \right). \quad (4.69)$$

Par intégration par parties on obtient un moment cinétique par unité de longueur

$$\int dx \int dy \ell_z = \pm \frac{\varepsilon_0}{\omega} \int dx \int dy E_0^2(x, y). \quad (4.70)$$

Cette expression ne diffère de la composante z de la densité d'impulsion (4.68) que par la constante k . De plus, elle ne diffère de l'énergie que par la constante ω . Ces propriétés réapparaîtront en mécanique quantique pour un photon de polarisation circulaire et de fréquence ω dont l'énergie est $\hbar\omega$, l'impulsion $\hbar k$ et le moment cinétique $\pm\hbar$.

4.3.3 Paquet d'ondes

Jusqu'à ce point nous avons considéré des ondes monochromatiques, c.-à-d. des solutions des équations d'onde (4.43) avec une dépendance temporelle sinusoïdale. Une telle onde avec une seule fréquence ω n'est pas réalisable expérimentalement. On arrive tout au plus à réduire fortement la largeur $\Delta\omega$ de l'intervalle des fréquences contribuant à l'onde. Nous partons de l'équation d'onde scalaire

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4.71)$$

où $f(\mathbf{r}, t)$ représente une des composantes du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ou du champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Pour faciliter la discussion nous considérons une onde plane se propageant dans la direction z

$$f(\mathbf{r}, t) = f(z - ct). \quad (4.72)$$

Elle peut être représentée à l'aide de la transformée de Fourier (10.29)

$$f(z - ct) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i[kz - \omega(k)t]} \tilde{f}(k) \quad (4.73)$$

où $\omega(k) = ck$. Pour une onde monochromatique de fréquence $\omega_0 = ck_0$, $f(z - ct) = e^{ik_0(z-ct)}$, on a la représentation mathématique donnée par la distribution de Dirac (10.15)

$$\tilde{f}(k) = 2\pi\delta(k - k_0) .$$

Pour une onde réaliste et presque monochromatique, on utilise une transformée de Fourier $\tilde{f}(k)$ qui possède un maximum prononcé à k_0 et une largeur $\Delta k \ll k_0$ comme illustré sur FIG. 4.2. Dans le cas d'un tel **paquet d'ondes**, on peut montrer que la fonction $f(z - ct)$ est étendue, en un temps t donné, sur une largeur Δz reliée à Δk par l'inégalité

$$\Delta k \Delta z \geq \frac{1}{2} . \quad (4.74)$$

Mathématiquement, ces largeurs sont définies par les écarts quadratiques

$$\begin{aligned} (\Delta z)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dz (z - \langle z \rangle)^2 |f(z)|^2 / \int_{-\infty}^{\infty} dz |f(z)|^2 , \\ (\Delta k)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk (k - \langle k \rangle)^2 |\tilde{f}(k)|^2 / \int_{-\infty}^{\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2 , \end{aligned}$$

où l'on a introduit les valeurs moyennes

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dz z |f(z)|^2 / \int_{-\infty}^{\infty} dz |f(z)|^2 , \\ \langle k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dk k |\tilde{f}(k)|^2 / \int_{-\infty}^{\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2 . \end{aligned}$$

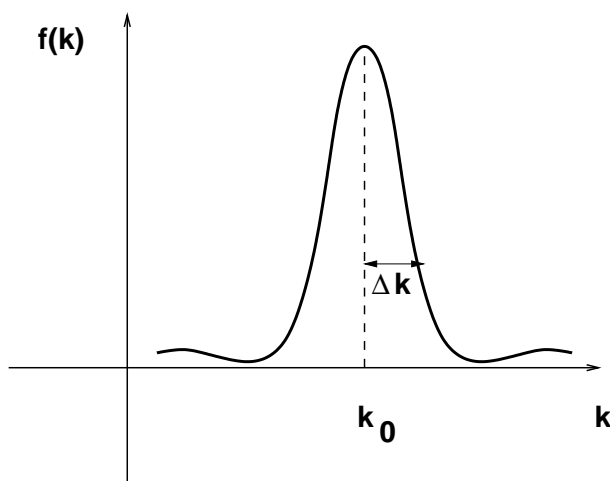


FIGURE 4.2 – Transformée de Fourier du paquet d'ondes

4.4 Potentiel vecteur et potentiel scalaire

Dans la section 4.1, nous avons vu que les champs statiques $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ peuvent être exprimés comme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) . \quad (4.75)$$

Deux des quatre équations de l'électrostatique et de la magnétostatique sont alors automatiquement satisfaites et le problème se réduit à la solution des équations de Poisson (4.24) et (4.26) pour $\Phi(\mathbf{r})$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Cette approche peut être généralisée à l'électrodynamique. Dans ce cas, les potentiels scalaire $\Phi(\mathbf{r}, t)$ et vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ se révèlent extrêmement utiles.

4.4.1 Existence des potentiels et choix de la jauge

En électrodynamique, pour des densités $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ données, les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ sont les solutions, obéissant à des conditions aux bords appropriées, des équations de Maxwell (4.31) à (4.34). Comme pour les équations de Poisson du cas statique, nous recherchons ces solutions en passant par les potentiels $\Phi(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ dont les relations avec les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ sont fournies par le **lemme de Poincaré**⁴. Nous appliquons ce lemme à la troisième et à la quatrième équation de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

En vertu de Poincaré b), la première de ces deux relations implique qu'il existe une fonction $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ appelée **potentiel vecteur** telle que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (4.76)$$

En insérant cette expression dans la deuxième relation donnée plus haut, on obtient

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 .$$

Alors, d'après Poincaré a), il existe une fonction $\Phi(\mathbf{r}, t)$ appelée **potentiel scalaire** et satisfaisant la relation

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi$$

où l'on fait un choix conventionnel du signe. Il en résulte

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} . \quad (4.77)$$

4. Lemme de Poincaré

Pour tout champ vectoriel \mathbf{v} continûment différentiable dans un ouvert convexe de \mathbb{R}^3 , on a les équivalences :

$$\begin{aligned} a) \quad \nabla \times \mathbf{v} &= 0 \iff \exists \text{ champ scalaire } f \text{ tel que } \mathbf{v} = \nabla f \\ b) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \iff \exists \text{ champ vectoriel } \mathbf{w} \text{ tel que } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{w} . \end{aligned}$$

La vérification de la condition suffisante est immédiate, pour la condition nécessaire (existence!), on se réfère au cours d'*Analyse III*.

Les champs \mathbf{A} et Φ sont appelés **champs de jauge**. Ils ne sont pas uniques puisque la **transformation de jauge**

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (4.78)$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (4.79)$$

où $\chi(\mathbf{r}, t)$ est une fonction différentiable quelconque, laisse les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} inchangés

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (4.80)$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla\Phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\chi) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\chi) = \mathbf{E}. \quad (4.81)$$

Les lois de l'électromagnétisme ont donc une **invariance de jauge** ou **symétrie de jauge**. Il existe toute une famille de potentiels paramétrisés par la fonction $\chi(\mathbf{r}, t)$ qui représentent les mêmes champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . Dès lors, nous sommes libres de choisir la fonction χ , **la jauge**, la plus appropriée pour une situation donnée. Les deux choix les plus importants seront discutés dans les sections 4.4.2 et 4.4.3.

Il nous reste encore à écrire les deux premières équations de Maxwell en termes de champs de jauge Φ et \mathbf{A} . En insérant (4.76) et (4.77) dans (4.31) et (4.32) nous obtenons

$$\begin{aligned} -\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \\ -\nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) &= \mu_0\mathbf{j}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité (4.22). En introduisant l'opérateur de d'Alembert (4.44), nous arrivons aux **équations des champs de jauge**

$$\square\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad (4.82)$$

$$\square\mathbf{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{j}. \quad (4.83)$$

Ces équations linéaires couplées pour les champs \mathbf{A} et Φ sont invariantes sous une transformation de jauge (vérification!). Pour leur résolution, on choisira la jauge qui permettra de les simplifier au mieux. Un choix évident qui découple les équations (4.82) et (4.83) apparaît immédiatement. Toutefois, ce choix ne peut être fait que si la fonction $\chi(\mathbf{r}, t)$ correspondante existe.

4.4.2 Jauge de Lorentz

La liberté de choix des potentiels nous permet de découpler les champs Φ et \mathbf{A} dans les équations (4.82) et (4.83) en imposant la **condition de Lorentz**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (4.84)$$

pour arriver aux équations

$$\square \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (4.85)$$

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (4.86)$$

Il reste à vérifier que ce choix de jauge est toujours possible. Avec les champs \mathbf{A}' et Φ' qui ne satisfont pas la condition de Lorentz, la transformation de jauge

$$\Phi = \Phi' - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \chi$$

nous livre des potentiels \mathbf{A} et Φ . Imposer la condition de Lorentz (4.84) à ces potentiels revient à écrire l'équation

$$\square \chi = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right). \quad (4.87)$$

et à trouver la solution χ . On en déduit qu'il est toujours possible de choisir la jauge de Lorentz puisque en théorie des équations différentielles, on montre que, pour \mathbf{A}' et Φ' donnés, une solution de (4.87) existe. En fait, il existe toute une famille de potentiels qui appartiennent à la jauge de Lorentz, à savoir tous ceux qui sont reliés par une transformation de jauge avec une fonction χ solution de $\square \chi = 0$.

4.4.3 Jauge de Coulomb

Dans certains problèmes d'électrodynamique, il est pratique de choisir un potentiel vecteur \mathbf{A} satisfaisant la **condition de Coulomb**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (4.88)$$

De même que pour la jauge de Lorentz, on vérifie que ce choix est possible. En effet, pour \mathbf{A}' donné qui ne satisfait pas (4.88), on effectue la transformation de jauge

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \chi.$$

Alors, on doit trouver une fonction χ telle que le potentiel \mathbf{A} obéisse à la condition (4.88). Cette démarche est possible puisque l'équation de Poisson

$$\nabla^2 \chi = -\nabla \cdot \mathbf{A}'$$

a toujours une solution, en fait toute une famille de solutions reliées par des transformations de jauge, à savoir toutes celles qui sont reliées par une transformation de jauge avec une fonction χ solution de $\nabla^2\chi = 0$. Avec la jauge de Coulomb, les équations (4.82) et (4.83) deviennent

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad (4.89)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0(\mathbf{j} + \mathbf{j}_D) \quad (4.90)$$

où l'on a défini le courant

$$-\mu_0\mathbf{j}_D = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\Phi \right)$$

qui, à l'aide de (4.77), vaut

$$\mathbf{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.91)$$

Il s'agit du courant de déplacement introduit dans la section 4.2. Les équations (4.89) et (4.90) ressemblent aux relations statiques (4.24) et (4.26). Une solution pour $\Phi(\mathbf{r}, t)$ peut en effet s'écrire

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.92)$$

Elle correspond à (4.5) et représente le potentiel de Coulomb instantané dû à la densité de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$, d'où le nom de jauge de Coulomb. La jauge de Coulomb est utilisée lorsque ρ et \mathbf{j} sont nuls. Dans ce cas on peut choisir $\Phi = 0$ et \mathbf{A} solution de l'équation d'onde

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.93)$$

Le potentiel vecteur \mathbf{A} détermine alors \mathbf{E} et \mathbf{B} par les relations

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.94)$$

4.4.4 Potentiels retardés

Avec le choix de la jauge de Lorentz (4.84) les potentiels $\Phi(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ satisfont les équations (4.86). Une fois leurs solutions connues, les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} se calculent à l'aide des relations (4.76) et (4.77). Une méthode élégante de résolution des équations (4.85) et (4.86) est fournie par la **fonction de Green** $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ définie par l'équation

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (4.95)$$

où le gradient ∇ s'applique sur \mathbf{r} et non pas \mathbf{r}' . Alors, pour $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ connue, la solution de l'équation (4.85) est donnée par l'intégrale

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t'), \quad (4.96)$$

comme on le vérifie facilement par simple substitution de $\Phi(\mathbf{r}, t)$ dans l'équation de d'Alembert (4.85). On a évidemment une formule analogue pour le potentiel vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t'), \quad (4.97)$$

Grâce à la linéarité du problème, on détermine G solution de (4.95) en utilisant les transformées de Fourier (10.29) qui vont permettre de passer de l'équation différentielle (4.95) à une équation algébrique. Les transformées de Fourier de la fonction $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ et de la distribution $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$ sont données par les expressions

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{-i\omega(t-t')} g(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.98)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{-i\omega(t-t')}. \quad (4.99)$$

Alors, l'équation (4.95) transformée de Fourier s'écrit

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)g(\mathbf{k}, \omega) = -4\pi. \quad (4.100)$$

Ainsi, déterminer G revient à calculer l'intégrale

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -\frac{4\pi c^2}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]}}{\omega^2 - k^2 c^2} \quad (4.101)$$

qui n'est pas définie sur tout l'axe réel ω . Pour l'intégration sur $d\omega$, on évite les singularités $\omega = \pm ck$ en passant à une intégrale sur un chemin dans le plan complexe grâce au lemme de Jordan et en utilisant le théorème des résidus (voir ces théorèmes dans l'appendice 10.4). Puis, l'intégration sur d^3k est faite en coordonnées sphériques. Le calcul fournit les deux solutions de distribution de Dirac

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(\pm \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - (t - t')\right),$$

Dans notre contexte physique, seule la solution causale (signe +) est acceptable. Cela signifie que le signal existe seulement pour $t > t'$, c.-à-d. pour un temps de mesure t postérieur au temps d'émission t' . On obtient ainsi, la fonction de Green retardée

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(\frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - (t - t')\right). \quad (4.102)$$

En insérant cette fonction de Green dans (4.96) et dans la formule analogue pour \mathbf{A} , nous obtenons en intégrant sur t' les solutions appelées **potentiels retardés**

$$\Phi_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right), \quad (4.103)$$

$$\mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right). \quad (4.104)$$

Ces intégrales constituent un aboutissement important de l'électrodynamique. En effet, pour ρ et \mathbf{j} donnés, elles permettent de calculer, en tout point de l'espace et pour tout temps, les champs électriques et magnétiques en passant par les relations (4.76) et (4.77),

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} .\end{aligned}$$

C'est la solution explicite de l'un des problèmes fondamentaux de l'électrodynamique.

4.5 Champ électromagnétique d'une particule chargée en mouvement rectiligne uniforme

Une particule chargée en mouvement crée évidemment un champ électromagnétique. Comme exemple simple, calculons les potentiels retardés d'une particule chargée en mouvement rectiligne uniforme. Pour une particule de charge q et de vitesse constante $\mathbf{v} \parallel Oz$, on définit les densités de charge et de courant pour tout point $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de l'espace. Les densités seront non nulles seulement sur les points de la trajectoire $\mathbf{r}'(t) = (0, 0, vt)$. Elles peuvent donc être représentées par des fonctions de Dirac

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = q \delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) \quad (4.105)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = q \mathbf{v} \delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) . \quad (4.106)$$

On vérifie que l'équation de continuité $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial\rho/\partial t = 0$ est satisfaite. Le potentiel scalaire est fourni par la formule des potentiels retardés (4.103)

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\delta(x') \delta(y') \delta(z' - vt_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad t_r = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| . \quad (4.107)$$

De même, on peut écrire le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Pour le calcul de cette intégrale, on utilise la propriété⁵ suivante de la fonction de Dirac

$$\delta(f(z')) = \sum_j \frac{1}{|f'(z_j)|} \delta(z' - z_j) \quad (4.108)$$

5. On considère la fonction $f(x)$ possédant des zéros aux points $x_i \in \mathbb{R}$ et une fonction continue φ . Par intégration, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(f(x))\varphi(x) &= \sum_i \int_{f(x_i-\epsilon)}^{f(x_i+\epsilon)} \frac{dy}{f'(x(y))} \delta(y) \varphi(x(y)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \varphi(x_i) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) \varphi(x) .\end{aligned}$$

Pour le calcul, on a pris de petits intervalles $[x_i - \epsilon, x_i + \epsilon]$ autour des zéros $f(x_i) = 0$, puis on effectue un changement de variable $y = f(x)$, $dy = f'(x)dx$ et on intègre pour obtenir le résultat valable pour toute fonction φ .

où les z_j sont les zéros de la fonction $f(z') = z' - vt + \beta\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$. A l'aide de cette propriété, l'intégration de (4.107) (exercice) donne

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)(x^2 + y^2) + (z - vt)^2}} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (4.109)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \Phi(\mathbf{r}, t) . \quad (4.110)$$

On tire les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} à partir des relations (4.76) et (4.77). Dans le cadre de la relativité restreinte, on verra comment déduire de manière plus élégante ces champs \mathbf{E} et \mathbf{B} à partir des transformations de Lorentz.

Chapitre 5

Particule chargée dans un champ électromagnétique

Dans le chapitre précédent, nous avons appris comment calculer les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ pour des densités de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ et de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ données. Or, ces densités représentent des particules chargées qui suivent des trajectoires données par les équations du mouvement de la mécanique. Par exemple, dans la section 4.5, nous avons calculé les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} produits par une particule chargée en mouvement rectiligne uniforme. Réciproquement, dans ce chapitre on montrera comment décrire la dynamique d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. La force agissant sur les particules chargées est la force de Lorentz due au champ électromagnétique et la dynamique sera décrite à l'aide des formalismes de Lagrange et de Hamilton. On montrera aussi comment composer l'énergie totale des contributions du système mécanique et du champ électromagnétique.

5.1 Force de Lorentz

L'expérience montre qu'un champ électrique \mathbf{E} exerce sur une particule de charge q une force $q\mathbf{E}$. Cette effet permet de mesurer la force *i.e.* le champ \mathbf{E} à l'aide d'une **charge test** (c.-à-d. une charge qui est si petite que son influence sur le champ électrique peut être négligée). Si la particule se déplace avec une vitesse \mathbf{v} , elle subit aussi, en présence d'un champ magnétique \mathbf{B} , une force $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Ce terme est à l'origine de la force entre deux fils électriques découverte par Ampère. Ainsi, de manière générale, une particule de charge q et de vitesse $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ est accélérée par la **force de Lorentz**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] . \quad (5.1)$$

Comme on l'a vu en (2.51), pour une force dépendant de la vitesse, une fonction de Lagrange $L = T - V$ peut être définie s'il existe un potentiel $V(q, \dot{q}, t)$ tel que

$$Q_j(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_j} . \quad (5.2)$$

L'exemple typique est donné par la force de Lorentz (5.1). En effet, pour cette force, il existe un **potentiel électromagnétique**

$$V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = q[\Phi(\mathbf{r}, t) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] \quad (5.3)$$

où, comme on l'a vu en (4.76) et (4.77), les champs électriques et magnétiques s'expriment en termes de potentiels vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et scalaire $\Phi(\mathbf{r}, t)$ par les relations

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Vérifions, en utilisant les coordonnées cartésiennes, que le potentiel électromagnétique satisfait l'équation

$$F_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Nous avons à évaluer l'expression

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial x_j} = q \left[-\frac{d}{dt} A_j - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right].$$

Le premier terme du membre de droite peut être écrit

$$\frac{d}{dt} A_j = \frac{\partial}{\partial t} A_j + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla A_j,$$

tandis que le dernier terme est relié à \mathbf{B} par

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla A_j + [\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_j = \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla A_j + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_j,$$

d'où, en soustrayant cette équation de la précédente, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} A_j - \frac{\partial}{\partial x_j} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial t} A_j - (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_j.$$

Le résultat,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial x_j} = q \left(-\frac{\partial}{\partial t} A_j - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) + q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_j,$$

reproduit en fait la force de Lorentz.

5.2 Fonctions de Lagrange et de Hamilton

A l'aide du potentiel électromagnétique (5.3), la fonction de Lagrange de la particule chargée q dans un champ électromagnétique s'écrit

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q(\Phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}). \quad (5.4)$$

Cette fonction de Lagrange L n'est pas invariante par transformation de jauge (4.79). En effet, le remplacement $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ et $\Phi' = \Phi - \partial\chi/\partial t$ nous conduit à la nouvelle fonction de Lagrange

$$L' = L + q \left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\chi \right) = L + q \frac{d}{dt} \chi. \quad (5.5)$$

qui possède, par rapport à l'ancienne, un terme de dérivée totale supplémentaire. Cette nouvelle fonction L' décrit cependant la même dynamique puisque toute variation de l'action donnée par L' fournit les mêmes équations de Lagrange.

Pour établir la fonction de Hamilton, nous avons besoin des impulsions généralisées en coordonnées cartésiennes. Le calcul donne

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + qA_j \quad (5.6)$$

Dans ce cas, on remarque que l'impulsion généralisée \mathbf{p} est différente de la quantité de mouvement $m\dot{\mathbf{r}}$. L'inversion de la relation linéaire (5.6) fournit les vitesses généralisées en fonction des coordonnées et des impulsions généralisées

$$\dot{x}_j = \frac{1}{m}(p_j - qA_j) .$$

Alors, avec la définition (3.4) de la fonction de Hamilton, on obtient

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j p_j - L \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{m}(p_j - qA_j)p_j - \frac{1}{2m}(p_j - qA_j)^2 \right] + q \left(\Phi - \sum_{j=1}^3 \frac{1}{m}(p_j - qA_j)A_j \right) \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 (p_j - qA_j)^2 + q\Phi . \end{aligned}$$

D'où l'expression de la **fonction de Hamilton de la particule chargée** plongée dans un champ électromagnétique

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi \quad (5.7)$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et $\Phi(\mathbf{r}, t)$ dépendent de l'espace et du temps. Cette fonction joue un rôle primordial en physique, tout particulièrement en mécanique quantique. Elle est en fait à la base de tous les systèmes atomiques.

5.3 Energie totale du système particule et champ

La fonction de Hamilton (5.7) représente l'énergie d'une particule chargée plongée dans un champ électromagnétique. Nous avons appris dans le paragraphe 4.2 que le champ électromagnétique contient aussi de l'énergie et que celle-ci peut être transformée en énergie mécanique et vice-versa. Le cas de la particule chargée que nous avons abordé ici nous permet de mieux comprendre les problèmes qui relient énergie mécanique et énergie électromagnétique. Si le champ électromagnétique dépend du temps, l'énergie mécanique (5.7) n'est pas conservée. En fait, avec les crochets de Poisson donnés par la formule (3.25), on peut écrire

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{q}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + q\frac{\partial \Phi}{\partial t} . \quad (5.8)$$

En introduisant la relation (4.77) $\partial\mathbf{A}/\partial t = -\mathbf{E} - \nabla\Phi$ entre le champ électrique \mathbf{E} et les champs de jauge \mathbf{A} , Φ ainsi que la relation (5.6) $(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) = m\dot{\mathbf{r}}$ entre l'impulsion généralisée \mathbf{p} et la vitesse $\dot{\mathbf{r}}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} + q\left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \\ &= q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} + q\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}, t) .\end{aligned}\quad (5.9)$$

Le premier terme constitué du produit du courant $q\dot{\mathbf{r}}$ avec le champ \mathbf{E} correspond à la **chaleur de Joule** introduite phénoménologiquement dans le paragraphe 4.2. Il est compensé par une diminution de l'énergie du champ électromagnétique. Le deuxième terme de l'équation (5.9) provient directement du potentiel scalaire présent dans la fonction de Hamilton (5.7).

Toutefois, dans le contexte de cette section, la fonction de Hamilton n'est pas la grandeur essentielle. Nous nous intéressons plutôt à l'énergie totale E_{tot} qui doit contenir les énergies de la particule et l'énergie du champ électromagnétique. Cette énergie totale que l'on peut tirer de (5.9) ne peut que changer par rayonnement à travers la surface de la région spatiale considérée,

$$\frac{d}{dt}E_{tot} + \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} = 0 . \quad (5.10)$$

Afin de pouvoir comparer les résultats ci-dessus avec le théorème de l'énergie (4.39), introduisons au moyen de la fonction de Dirac, la densité de courant ¹

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = q\dot{\mathbf{r}}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)) \quad (5.11)$$

d'une particule ponctuelle de charge q qui suit la trajectoire connue $\mathbf{r}(t)$. L'équation (5.9) devient

$$\frac{d}{dt}[H - q\Phi(\mathbf{r}, t)] = \int_V d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) . \quad (5.12)$$

Alors le théorème de l'énergie (4.39) fournit la relation

$$\frac{d}{dt}\left[H - q\Phi(\mathbf{r}, t) + \int_V d^3r' u(\mathbf{r}', t)\right] + \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} = 0 , \quad (5.13)$$

qui nous permet de définir l'**énergie totale** du système particule et champ

$$\begin{aligned}E_{tot} &= H - q\Phi + \int_V d^3r' u(\mathbf{r}', t) \\ &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi - q\Phi + \int_V d^3r' u(\mathbf{r}', t) \\ &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + \int_V d^3r' \left(\frac{\varepsilon_0}{2}|\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}(\mathbf{r}', t)|^2\right) .\end{aligned}\quad (5.14)$$

Le fait que notre système mécanique et le champ électromagnétique soient couplés implique donc qu'il est assez arbitraire quelle partie est attribuée aux particules et quelle partie est attribuée au champ.

1. En interprétant la "fonction de Dirac", on voit que cette densité de courant est nulle lorsque l'on n'est pas sur la trajectoire *i.e.* $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}(t)$ et différente de zéro sur la trajectoire $\mathbf{r}(t)$.

Chapitre 6

Électrodynamique dans les milieux matériels

Les équations de Maxwell (4.31) à (4.34) et la force de Lorentz (5.1) peuvent décrire les phénomènes électromagnétiques au niveau microscopique où chaque particule chargée est considérée explicitement. Or, il n'est pas possible de suivre en détail l'évolution de 10^{23} électrons et noyaux, ni théoriquement ni expérimentalement. L'expérimentateur s'intéresse aux grandeurs macroscopiques qui représentent "en moyenne" la dynamique des constituants chargés. Le but de **l'électrodynamique macroscopique** sera alors de développer une théorie qui tient compte des détails microscopiques d'une manière globale et phénoménologique. Il existe aujourd'hui des méthodes ab initio qui permettent de prédire le comportement macroscopique à partir des équations microscopiques, mais pas sans approximations sévères, souvent mal contrôlées. Dans ce contexte, il est important de mentionner qu'à l'échelle des atomes l'approche classique doit être remplacée par le formalisme de la mécanique quantique. La théorie quantique des corps macroscopiques est capable de prédire, au moins en principe, l'aimantation d'un matériau pour un champ magnétique extérieur donné ou le courant électrique traversant un fil métallique en fonction de la tension appliquée. Pour comprendre les concepts fondamentaux tels que la polarisation et l'aimantation, une approche classique est néanmoins suffisante.

6.1 Polarisation de la matière

Nous considérons d'abord l'électrostatique. Pour une densité de charge $\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$ représentant la distribution de charge à l'intérieur d'une molécule de centre de masse situé en \mathbf{r}_i , le potentiel électrostatique $\Phi_{\text{mol}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$ de la molécule est donné par la formule (4.5),

$$\Phi_{\text{mol}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.1)$$

En définissant la nouvelle variable $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_i$, (6.1) devient

$$\Phi_{\text{mol}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r'' \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i - \mathbf{r}''|}. \quad (6.2)$$

Comme illustré sur FIG. 6.1, pour \mathbf{r} situé loin de la molécule i.e $r'' \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$, nous pouvons faire le développement limité

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i - \mathbf{r}''|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} - \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \cdot \mathbf{r}'' + \dots \quad (6.3)$$

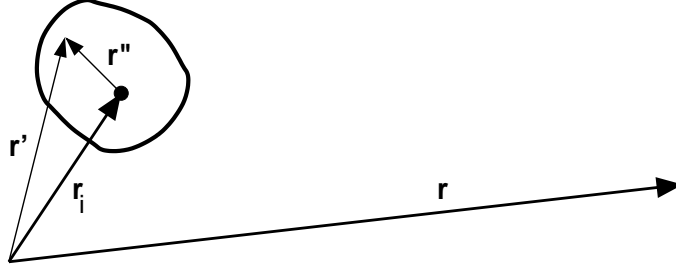


FIGURE 6.1 – Molécule de centre de gravité \mathbf{r}_i

En ne retenant que les deux premiers termes, on obtient le potentiel

$$\Phi_{\text{mol}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} - \mathbf{p}_i \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right] \quad (6.4)$$

où l'on a introduit la charge totale de la molécule située en \mathbf{r}_i

$$q_i = \int d^3r \rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \quad (6.5)$$

et défini son **moment dipolaire**

$$\mathbf{p}_i = \int d^3r \mathbf{r} \rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}) . \quad (6.6)$$

Le deuxième terme de (6.4) est le terme de potentiel dipolaire bien connu. Pour un ensemble de molécules, le potentiel total est simplement donné par la somme des contributions (6.4) de toutes les molécules. En définissant la densité de charge totale

$$\rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}') = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \quad (6.7)$$

et la polarisation totale

$$\mathbf{P}_{\text{micro}}(\mathbf{r}') = \sum_i \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) , \quad (6.8)$$

on arrive au potentiel microscopique

$$\Phi_{\text{micro}}(\mathbf{r}) = \sum_i \Phi_{\text{mol}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left[\frac{\rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathbf{P}_{\text{micro}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] , \quad (6.9)$$

où toutes les molécules sont à l'intérieur du volume (macroscopique) V . Ce potentiel varie d'une molécule à l'autre, mais comme nous nous intéressons à des échelles plus grandes, par exemple à des dimensions de l'ordre de $10^{-4}m$ correspondant à des volumes v contenant un très grand nombre de molécules (de l'ordre de 10^{16}), nous introduisons la moyenne

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{v} \int_v d^3x \Phi_{\text{micro}}(\mathbf{r} + \mathbf{x}) . \quad (6.10)$$

A l'aide de (6.9) et d'un changement de variables, $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}' + \mathbf{x}$ on obtient

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left[\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \quad (6.11)$$

où l'on a introduit la densité de charge moyenne

$$\rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{v} \int_v d^3x \rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}' + \mathbf{x}) \quad (6.12)$$

et la **polarisation moyenne**

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') = \frac{1}{v} \int_v d^3x \mathbf{P}_{\text{micro}}(\mathbf{r}' + \mathbf{x}) . \quad (6.13)$$

A noter que l'intégration s'étend sur le volume macroscopique V dans (6.11), mais seulement sur le petit volume v dans (6.10) (6.12) et (6.13). On modifie l'expression (6.11) en utilisant la propriété $\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla'(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ et en faisant une intégration par parties

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left[\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] . \quad (6.14)$$

Après application du théorème de la divergence, le deuxième terme disparaît, si l'on admet que $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ s'annule au bord. On obtient le potentiel scalaire

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{[\rho(\mathbf{r}') - \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.15)$$

où seule la distribution de charge à été modifiée par la polarisation. Alors, en tenant compte de la relation avec le champ de jauge $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, on peut immédiatement écrire les équations du champ électrique macroscopique

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (6.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} . \quad (6.17)$$

Avec la définition du **déplacement électrique**

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad (6.18)$$

la relation (6.17) devient

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho . \quad (6.19)$$

En résumé, le champ électrique macroscopique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ se compose du champ $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ induit par l'excès de charge (les matériaux sont essentiellement neutres) et du champ de polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ dû au déplacement relatif des charges positives et négatives. Les équations (6.16) et (6.19) définissent l'électrostatique macroscopique où ρ est la densité de charge moyenne. Mais ces équations ne sont pas suffisantes pour déterminer les champs \mathbf{E} et \mathbf{D} . Elles doivent être complétées par une relation constitutive entre le champ électrique \mathbf{E} et la polarisation \mathbf{P} . Cette équation additionnelle dépend des propriétés spécifiques du matériau considéré. Nous reviendrons à ce problème plus tard.

6.2 Aimantation de la matière

Nous avons vu comment établir les équations macroscopiques de l'électrostatique à l'aide de moyennes sur les grandeurs microscopiques. La démarche pour la magnétostatique macroscopique est similaire. Pour une densité de courant microscopique $\mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r})$ donnée, le potentiel vecteur se calcule à l'aide de (4.8),

$$\mathbf{A}_{\text{micro}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.20)$$

Nous imaginons d'abord les courants électriques limités à une certaine région de l'espace, par exemple celle occupée par les constituants d'une molécule. Il est facile de se convaincre que dans ce cas le courant total (statique) est zéro. En fait, par intégration par parties, on obtient

$$\int d^3r j_{\text{micro}}^x(\mathbf{r}) = \int d^3r \nabla \cdot [x \mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r})] - \int d^3r x \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}) = 0, \quad (6.21)$$

où l'on a utilisé la condition de bord $(x \mathbf{j}_{\text{micro}})|_{\partial V} = 0$ et l'équation de continuité statique $\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{micro}} = 0$. Nous choisissons comme origine le centre de la région avec courant localisé par \mathbf{r}' et considérons un point \mathbf{r} en dehors de cette région. Alors le développement

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^3} + \dots$$

nous amène à

$$\mathbf{A}_{\text{micro}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}|} \int d^3r' \mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}|^3} \int d^3r' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}') + \dots$$

Le premier terme est nul au vu de (6.21) et le deuxième terme peut être transformé à l'aide de l'identité

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) = \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}.$$

On en déduit

$$\int d^3r' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \int d^3r' \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) - \mathbf{r} \times \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}.$$

D'autre part, avec la loi de conservation statique $\nabla' \cdot \mathbf{j} = 0$ et par intégration par parties, on effectue les transformations

$$\begin{aligned} \int d^3r' x'_\alpha (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) &= \int d^3r' x'_\alpha \sum_{\beta=1}^3 x_\beta j_\beta = \int d^3r' x'_\alpha \sum_{\beta=1}^3 j_\beta \partial_{x'_\beta} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) \\ &= \int d^3r' x'_\alpha \mathbf{j} \cdot \nabla' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) = \int d^3r' x'_\alpha \nabla' \cdot [(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}] \\ &= - \int d^3r' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') j_\alpha \end{aligned} \quad (6.22)$$

qui permettent d'obtenir

$$\int d^3r' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}').$$

On arrive ainsi au résultat simple

$$\mathbf{A}_{\text{micro}}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \times \mathbf{m} + \dots \quad (6.23)$$

où \mathbf{m} est le **moment magnétique** défini par

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}') . \quad (6.24)$$

Pour un ensemble de molécules situées en \mathbf{r}_i l'équation (6.23) devient par superposition

$$\mathbf{A}_{\text{micro}}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{M}_{\text{micro}}(\mathbf{r}') + \dots , \quad (6.25)$$

où l'aimantation (microscopique) est définie par

$$\mathbf{M}_{\text{micro}}(\mathbf{r}') = \sum_i \mathbf{m}_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) . \quad (6.26)$$

En nous limitant au premier terme du développement (6.25) nous pouvons effectuer la moyenne comme dans le cas de l'électrostatique

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{v} \int_v d^3x \mathbf{A}_{\text{micro}}(\mathbf{r} + \mathbf{x}) . \quad (6.27)$$

Jusqu'à ce point nous n'avons considéré que les courants internes qui se manifestent par les moments magnétiques \mathbf{m}_i des molécules. En général il faudra admettre des courants qui traversent le système et ajouter la densité de courant \mathbf{j}_f représentant, par exemple, les électrons de conduction d'un métal ou d'un semiconducteur. On arrive alors à l'équation macroscopique ("coarse grained")

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}_f(\mathbf{r}') - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') , \quad (6.28)$$

où l'on a introduit l'**aimantation moyenne**

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{v} \int_v d^3x \mathbf{M}_{\text{micro}}(\mathbf{r} + \mathbf{x}) . \quad (6.29)$$

Il convient de réécrire le terme magnétique de (6.28), en utilisant la relation

$$\begin{aligned} -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') &= \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\nabla' \times \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right) + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') . \end{aligned}$$

A l'aide du théorème de Stokes généralisé l'intégrale sur le premier terme peut être transformée en intégrale de surface (entourant tout le système)

$$\int d^3r' \nabla' \times \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right) = \int_{\Sigma} d\boldsymbol{\sigma}' \times \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right)$$

qui vaut zéro. Nous obtenons donc un expression similaire à (6.15)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{[\mathbf{j}_f(\mathbf{r}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.30)$$

où la densité de courant a été modifiée par le terme d'aimantation $\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$. En tenant compte de la relation $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, nous pouvons tout de suite écrire les équations macroscopiques de la magnéto-statique

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_f + \nabla \times \mathbf{M}). \quad (6.32)$$

Avec la définition du **champ magnétique**

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (6.33)$$

nous pouvons réécrire l'équation (6.32) sous la forme

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f. \quad (6.34)$$

Comme en électrostatique macroscopique, les équations (6.31) et (6.34) ne sont pas suffisantes pour déterminer les champs \mathbf{B} et \mathbf{H} . Elles doivent être complétées par des relations constitutives, par exemple entre l'aimantation \mathbf{M} et le champ magnétique \mathbf{H} . Notons encore que dans le vide, il n'y a pas de distinction entre \mathbf{H} et \mathbf{B} , c'est pourquoi l'induction magnétique \mathbf{B} est souvent appelée champ magnétique.

6.3 Électrodynamique macroscopique

Pour les champs qui dépendent du temps t , il faut faire les moyennes spatiales et temporelles

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{v\tau} \int_v d^3r' \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \mathbf{E}_{\text{micro}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + t'), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{v\tau} \int_v d^3r' \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \mathbf{B}_{\text{micro}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + t'), \end{aligned} \quad (6.35)$$

où v et τ sont petits par rapports aux grandeurs caractéristiques macroscopiques (mais grands par rapport aux dimensions atomiques). Les potentiels $\Phi(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ sont définis de la même façon. Nous pouvons suivre la même démarche que pour les potentiels statiques, mais avec deux modifications importantes :

- Il faut utiliser les potentiels retardés (4.103) et (4.104).
- Il faut appliquer l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (6.36)$$

au lieu de la version statique $\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}) = 0$.

Notons d'abord que les équations homogènes (6.16) et (6.31) restent inchangées en passant du monde microscopique au monde macroscopique. Nous supposons que la moyenne temporelle (6.35) est effectuée sur plusieurs périodes atomiques, ce qui nous permet de négliger les effets de retardement. Le potentiel scalaire peut alors être analysé comme dans le cas statique et on trouve de nouveau les relations (6.18) et (6.19) pour les grandeurs $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ et $\rho(\mathbf{r}, t)$. Pour le potentiel vecteur la seule différence par rapport au cas statique provient de l'équation de continuité. L'équation (6.21) est alors remplacée par

$$\int d^3r \mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t),$$

et (6.30) devient

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\mathbf{j}_f(\mathbf{r}', t') + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}', t') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}', t') \right].$$

La loi d'Ampère macroscopique s'écrit donc

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_f + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \nabla \times \mathbf{M} \right)$$

ou, compte tenu des définitions de \mathbf{D} (6.18) et \mathbf{H} (6.33)

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \mathbf{j}_f.$$

Dans un milieu matériel, les équations macroscopiques de Maxwell prennent la forme

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f && \text{(Coulomb)} \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} &= \mathbf{j}_f && \text{(Ampère)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(Gauss)} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} &= 0 && \text{(Faraday)} \end{aligned} \quad (6.37)$$

où

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (6.38)$$

On vérifie facilement que les **densités libres** ρ_f , \mathbf{j}_f satisfont l'équation de continuité.

On remarque que les équations de Maxwell dans un milieu matériel dépendent, en plus des champs \mathbf{E} , \mathbf{B} , aussi des champs \mathbf{D} et \mathbf{H} . Elles ne sont par conséquent plus suffisantes pour déterminer l'ensemble de ces champs. En fait, la définition des grandeurs polarisation et aimantation a été faite de manière purement formelle. Pour les calculer nous devons recourir à une modélisation du matériau que l'on veut étudier. C'est ce que nous allons faire dans la section suivante en considérant des systèmes physiques simples où les relations entre les champs \mathbf{D} , \mathbf{H} et les nouvelles grandeurs \mathbf{P} , \mathbf{M} sont linéaires. Ces systèmes seront illustrés par quelques exemples élémentaires.

6.4 Relations constitutives

Les équations (6.37) et (6.38) ne suffisent pas pour traiter un problème concret d'électrodynamique dans un milieu matériel. En effet, pour résoudre les équations de Maxwell inhomogènes, on a besoin de relations supplémentaires entre \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{P} et \mathbf{j} et aussi entre \mathbf{H} , \mathbf{B} et \mathbf{M} afin d'aboutir à un système d'équations fermé. Ces **relations constitutives** dépendent du milieu matériel considéré. Pour des milieux simples, on peut les prendre linéaires. Nous définissons ci-dessous les relations constitutives entre \mathbf{j} et \mathbf{E} , entre \mathbf{P} et \mathbf{E} , entre \mathbf{M} et \mathbf{H} .

a) Pour un milieu conducteur électrique de **conductivité** σ , on a la **loi d'Ohm**

$$\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E} . \quad (6.39)$$

b) Pour un milieu diélectrique isotrope, on définit la **susceptibilité électrique** χ_e en admettant la relation linéaire¹

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} . \quad (6.40)$$

Alors, la définition (6.38) du déplacement électrique

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (6.41)$$

permet d'introduire la **constante diélectrique**

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (6.42)$$

c) De même, pour un milieu magnétique isotrope, on définit la **susceptibilité magnétique**² χ_m en admettant la relation linéaire

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} . \quad (6.43)$$

Alors, la définition (6.38) du champ magnétique

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (6.44)$$

permet d'introduire la **perméabilité magnétique**

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) . \quad (6.45)$$

Les valeurs de la conductivité σ et des susceptibilités χ_e et χ_m doivent être fixées en fonction du milieu considéré. Nous allons analyser ci-dessous trois modèles simplifiés qui apportent une idée qualitative des propriétés électromagnétiques de la matière à travers le calcul d'une conductivité électrique, d'une susceptibilité électrique et d'une susceptibilité magnétique.

1. Pour des milieux anisotropes, cette relation constitutive est matricielle $P_j = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^3 \chi_{jk} E_k$. Pour certains matériaux, elle peut être non linéaire $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}(\mathbf{E})$.

2. Lorsque la susceptibilité χ_m est positive, on dit que le milieu dans lequel apparaît l'aimantation est **paramagnétique**. Lorsque χ_m est négative, le milieu est dit **diamagnétique**.

Conductivité électrique

Dans un conducteur, une particule chargée est accélérée par un champ électrique $\mathbf{E}(t)$ et subit en même temps des collisions avec d'autres particules. Dans le modèle de Drude l'effet des collisions est décrit par une force de frottement visqueux $-m\gamma\mathbf{v}$. On peut écrire l'équation du mouvement

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\gamma\mathbf{v} + q\mathbf{E}. \quad (6.46)$$

Pour $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ la solution de cette équation est donnée par la fonction exponentielle $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\gamma t}$. Le mouvement de la particule est donc freiné. Dans le cas $\mathbf{E} \neq 0$, écrivons l'équation (6.46) comme

$$\frac{d}{dt} [e^{\gamma t} \mathbf{v}(t)] = \frac{q}{m} e^{\gamma t} \mathbf{E}(t).$$

Supposons que le champ soit enclenché au temps $t = 0$ et que la particule soit initialement au repos, $\mathbf{v}(0) = 0$. La vitesse pour $t > 0$ est alors

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{m} \int_0^t dt' e^{-\gamma(t-t')} \mathbf{E}(t').$$

Pour \mathbf{E} constant et un temps $t \gg \gamma^{-1}$, nous trouvons une vitesse asymptotique constante, $\mathbf{v} = q\mathbf{E}/(m\gamma)$. Pour une densité de particules n_f , on obtient la densité de courant

$$\mathbf{j}_f = n_f q \mathbf{v} = \frac{n_f q^2}{m\gamma} \mathbf{E}.$$

Il s'agit d'un courant stationnaire décrit par la loi d'Ohm $\mathbf{j}_f = \sigma\mathbf{E}$ et fournissant par conséquent la conductivité électrique

$$\sigma = \frac{n_f q^2}{m\gamma} \quad (6.47)$$

typique du conducteur que l'on a modélisé.

Susceptibilité électrique et constante diélectrique

Dans un diélectrique, la particule est liée, il faut ajouter un terme élastique (oscillateur) à l'équation du mouvement

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - m\gamma\mathbf{v} + q\mathbf{E}. \quad (6.48)$$

Alors, pour un champ électrique oscillant $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ donné, l'Ansatz de solution particulière $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$ introduit dans (6.48) donne

$$\mathbf{r}_0 = \frac{q}{m} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0.$$

En considérant une densité de particules n_b , on a la polarisation $\mathbf{P} = n_b q \mathbf{r}$ et avec (6.40), on obtient la susceptibilité

$$\varepsilon_0 \chi_e(\omega) = n_b \frac{q^2}{m} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega} \quad (6.49)$$

et la constante diélectrique

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi_e) = \left(\varepsilon_0 + \frac{n_b q^2}{m} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega} \right). \quad (6.50)$$

Notons que pour obtenir les grandeurs physiques, il faudra prendre les parties réelles des équations (6.40) et (6.41). On remarque cependant que les parties réelles et imaginaires de $\varepsilon(\omega)$

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{n_b q^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (6.51)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{n_b q^2}{m} \frac{\gamma \omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (6.52)$$

contribuent toutes les deux au déplacement \mathbf{D} .

Susceptibilité magnétique, paramagnétisme et diamagnétisme

On modélise le milieu magnétique par un système de N particules chargées ayant une énergie potentielle $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ et soumises à un champ d'induction magnétique statique $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Avec le choix de la **jauge circulaire**, le potentiel vecteur s'écrit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{B}{2} (-y, x, 0). \quad (6.53)$$

En introduisant le champ de jauge (6.53) dans la fonction de Hamilton (5.7)

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} [\mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]^2 + U, \quad (6.54)$$

le terme cinétique devient

$$\sum_i \frac{1}{2m_i} [\mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]^2 = \sum_i \frac{1}{2m_i} \left[\mathbf{p}_i^2 - q_i \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}_i) + \frac{1}{4} q_i^2 B^2 (x_i^2 + y_i^2) \right]. \quad (6.55)$$

La propriété de commutativité du produit mixte

$$\frac{q_i}{2m_i} \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}_i) = \frac{q_i}{2m_i} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{m}_i^{(0)}$$

met en évidence le **moment magnétique intrinsèque** d'une particule

$$\mathbf{m}_i^{(0)} = \frac{q_i}{2m_i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

La fonction de Hamilton prend alors la forme

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} \mathbf{p}_i^2 + U - \sum_i B (\mathbf{m}_i^{(0)})_z + \sum_i \frac{B^2 q_i^2}{8m_i} (x_i^2 + y_i^2). \quad (6.56)$$

Le moment magnétique total \mathbf{m}_i d'une particule est donné par la définition (6.24) où l'on utilise la densité de courant $\mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}) = q_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ pour obtenir

$$\mathbf{m}_i = \frac{q_i}{2} \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{q_i}{2m_i} \mathbf{r}_i \times [\mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)] = \mathbf{m}_i^{(0)} - \frac{q_i^2}{4m_i} \mathbf{r}_i \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}_i). \quad (6.57)$$

La composante parallèle à \mathbf{B} vaut

$$(\mathbf{m}_i)_z = (\mathbf{m}_i^{(0)})_z - \frac{q_i^2}{4m_i}(x_i^2 + y_i^2)B.$$

Pour un système de volume V , l'aimantation moyenne

$$M_z = \frac{1}{V} \sum_i (\mathbf{m}_i)_z = \frac{1}{V} \sum_i (\mathbf{m}_i^{(0)})_z - \frac{1}{V} \sum_i \frac{q_i^2 B}{4m_i} (x_i^2 + y_i^2) \quad (6.58)$$

comprend donc deux termes, le premier provenant des moments magnétiques intrinsèques (**paramagnétisme**), le second correspondant à une aimantation induite par le champ (**diamagnétisme**)

$$M_{z,\text{dia}} = \lambda_{\text{dia}} B \quad , \quad \lambda_{\text{dia}} = -\frac{1}{V} \sum_i \frac{q_i^2}{4m_i} (x_i^2 + y_i^2) \quad (\lambda_{\text{dia}} < 0).$$

Notons encore la relation intéressante

$$M_z = -\frac{1}{V} \frac{\partial H}{\partial B}, \quad (6.59)$$

qui découle de (6.56) et (6.58). A températures finies et pour $B = 0$, les moments magnétiques intrinsèques d'un matériau ont (sauf dans des cas exceptionnels tels que les ferroaimants) des directions aléatoires et l'aimantation est donc zéro. Pour $B \neq 0$, les moments intrinsèques ont la tendance à s'aligner parallèlement à \mathbf{B} . Pour un champ faible, on retrouve la relation linéaire $M_{z,\text{para}} = \lambda_{\text{para}} B$, où $\lambda_{\text{para}} (> 0)$ dépend de la température (selon la loi de Curie, $\lambda_{\text{para}} \sim T^{-1}$), donc l'aimantation totale $M_z = (\lambda_{\text{dia}} + \lambda_{\text{para}})B$. En comparant ce résultat avec (6.44), (6.45) et en définissant $\lambda := \lambda_{\text{dia}} + \lambda_{\text{para}}$, nous retrouvons les relations

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (6.60)$$

où la susceptibilité magnétique χ_m et la perméabilité magnétique μ sont données par

$$\chi_m = \frac{\mu_0 \lambda}{1 - \mu_0 \lambda}, \quad \mu = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0 \lambda}. \quad (6.61)$$

6.5 Ondes électromagnétiques dans la matière

Les ondes électromagnétiques se propagent aussi dans la matière. Nous considérons d'abord le cas où les densités libres de charges et de courants sont nulles, i.e. $\rho_f = 0$, $\mathbf{j}_f = 0$. Alors, avec les équations constitutives (6.41) et (6.44)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

les équations de Maxwell (6.37) deviennent

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.62)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (6.63)$$

Elles sont identiques aux équations de Maxwell dans le vide, sauf que $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ a été remplacé par $\varepsilon\mu$. Les solutions d'ondes sont donc les mêmes que dans le vide, mais avec une vitesse de propagation donnée par

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}} = c \sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}}. \quad (6.64)$$

En général $\varepsilon\mu > \varepsilon_0\mu_0$, donc $v < c$, mais il existe des exceptions. Une vitesse de propagation supérieure à c n'est cependant pas en contradiction avec la relativité restreinte³.

Comme deuxième cas d'ondes électromagnétiques dans la matière, nous considérons un conducteur dans un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ qui, avec la loi d'Ohm, génère le courant

$$\mathbf{j}_f(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Dans ce cas, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.65)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu\sigma \mathbf{E} \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (6.66)$$

L'Ansatz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (6.67)$$

fournit les relations

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 - \omega \mathbf{B}_0 = 0 \quad (6.68)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 + \mu\varepsilon\omega \mathbf{E}_0 = -i\mu\sigma \mathbf{E}_0. \quad (6.69)$$

En insérant la deuxième de ces relations dans la troisième, on trouve l'expression

$$\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = -\mu(\varepsilon\omega + i\sigma) \mathbf{E}_0$$

qui donne

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \left(1 + i \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right). \quad (6.70)$$

La partie imaginaire de k^2 (et donc aussi de k) implique qu'une onde électromagnétique est amortie exponentiellement au passage de la surface vers l'intérieur d'un conducteur. Cette longueur de pénétration ou **profondeur de skin** est très petite pour les bons conducteurs et/ou pour les grandes fréquences; dans ce cas un courant électrique est limité à la région de la surface.

3. Dans des milieux à dispersion anormale où l'indice de réfraction décroît lorsque la fréquence augmente, la propagation de l'onde peut être supraluminique, *i.e.* posséder des vitesses de phase ou de groupe supérieures à celle de la lumière. Toutefois, la vitesse de l'énergie reste inférieure à c . Il n'y a donc pas de contradiction avec la relativité d'Einstein puisque celle-ci interdit seulement qu'une onde transporte de l'énergie ou de l'information plus vite que la lumière (voir J. Schwinger et al., paragraphe 7.3).

6.6 Réflexion et réfraction

Lors du passage d'un milieu matériel à un autre et aussi en passant du vide à un milieu matériel ou réciproquement, le champ électromagnétique est modifié. Les équations macroscopiques de Maxwell (6.37) sont applicables à l'intérieur des deux milieux où les grandeurs $(\varepsilon, \mu, \sigma)$ sont en général différentes. Nous utilisons un modèle idéalisé où les grandeurs $(\varepsilon, \mu, \sigma)$ sont constantes à l'intérieur d'un milieu et changent, à l'interface, de manière abrupte d'une valeur à l'autre. En conséquence, certaines composantes du champ électromagnétique seront discontinues à l'interface.

6.6.1 Conditions de bord

Les conditions de bord des champs \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{H} et \mathbf{B} sont obtenues à l'aide des équations de Maxwell (6.37) et des théorèmes de l'analyse vectorielle appliqués à une région infiniment mince de l'interface (voir FIG. 6.2 et 6.3).

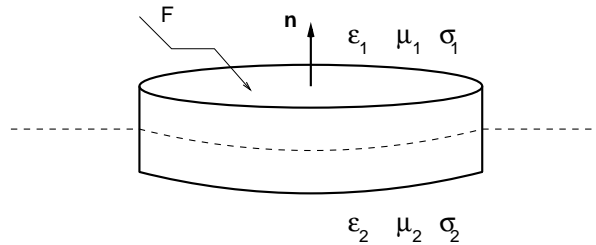


FIGURE 6.2 – Interface pour les champs \mathbf{D} et \mathbf{B}

Pour une charge libre q_f dans le volume v et en utilisant le théorème de la divergence, l'équation de Coulomb (6.37) donne

$$\int_v d^3r \nabla \cdot \mathbf{D} = \int_{\partial v} d\sigma \cdot \mathbf{D} = q_f . \quad (6.71)$$

D'un autre côté, en considérant un petit disque de surface F comme sur FIG. 6.2, nous pouvons écrire $q_f = \rho_s F$ où ρ_s est la densité de charge de surface. Alors, pour une épaisseur infinitésimale d du disque, l'équation (6.71) devient

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} F + \mathcal{O}(\partial F d) = \rho_s F$$

Pour $d \rightarrow 0$ on obtient la condition

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho_s . \quad (6.72)$$

En partant de l'équation de Gauss (6.37), la même procédure peut être appliquée au champ \mathbf{B} pour donner l'expression⁴

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 . \quad (6.73)$$

4. Cette condition peut aussi être déduite en exigeant la continuité des potentiels Φ et \mathbf{A} . C'est une condition nécessaire pour avoir des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} finis, comme on peut le voir en considérant les relations (4.76) et (4.77) qui introduisent les dérivées de ces potentiels. En effet, la continuité de Φ et \mathbf{A} dans l'interface parallèle au plan yx implique la continuité de $\partial\mathbf{A}/\partial x$, $\partial\mathbf{A}/\partial y$, $\partial\mathbf{A}/\partial t$, $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ (mais pas celle de $\partial\mathbf{A}/\partial z$, $\partial\Phi/\partial z$). On en déduit que $B_z = \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y$ est continu, comme le montre (6.73).

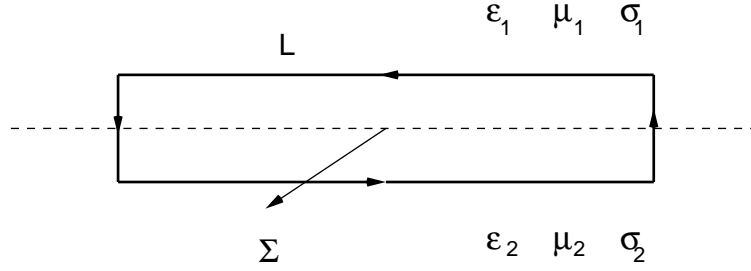


FIGURE 6.3 – Interface pour les champs \mathbf{E} et \mathbf{H}

A l'aide du théorème de Stokes, l'équation de Faraday (6.37) appliquée à l'interface décrite par FIG. 6.3 peut s'écrire

$$\oint_{\partial\Sigma} d\ell \cdot \mathbf{E} = \int_{\Sigma} d\sigma \cdot \nabla \times \mathbf{E} = - \int_{\Sigma} d\sigma \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} .$$

Comme $\partial \mathbf{B} / \partial t$ est fini sur un chemin arbitrairement proche de l'interface, le membre de droite est négligeable et par conséquent les composantes de \mathbf{E} parallèles à l'interface sont continues⁵

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0 . \quad (6.74)$$

En procédant de la même façon, selon FIG. 6.3, l'équation d'Ampère (6.37) conduit à la relation

$$\oint_{\partial\Sigma} d\ell \cdot \mathbf{H} = \int_{\Sigma} d\sigma \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_f \right) .$$

Pour les mêmes raisons que plus haut, le premier terme du membre de droite est à nouveau négligeable. Alors, en définissant la densité de courant de surface

$$j_s = \frac{1}{L} \int_{\Sigma} d\sigma \cdot \mathbf{j}_f ,$$

nous trouvons, à la limite d'un chemin arbitrairement proche de l'interface, la relation

$$(H_1 - H_2) = j_s$$

où H_1 et H_2 sont les projections de \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 sur l'interface. A l'aide de la normale \mathbf{n} à l'interface, nous pouvons écrire l'expression vectorielle

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{j}_s . \quad (6.75)$$

En résumé, à l'interface de deux milieux, nous avons les conditions suivantes

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} &= \rho_s \\ (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} &= \mathbf{j}_s \\ (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (6.76)$$

5. Cette condition de continuité des composantes de \mathbf{E} parallèles à l'interface peut aussi être établies en exigeant la continuité des potentiels Φ et \mathbf{A} .

Nous remarquons les similitudes de ces expressions avec les équations de Maxwell de l'électrostatique et de la magnétostatique dans un milieu matériel : le produit scalaire correspond à la divergence et le produit vectoriel au rotationnel. Ces associations fournissent un bon moyen mnémotechnique.

6.6.2 La loi de Snell

Dans cette section, on se limitera aux isolants où les densités $\rho, \mathbf{j}, \rho_s, \mathbf{j}_s$ sont nulles. On considère une interface à $z = 0$ séparant deux milieux de perméabilités magnétiques μ_1, μ_2 et de constantes diélectriques $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Une onde monochromatique est partiellement réfléchie et partiellement transmise selon FIG. 6.4. À l'aide des expressions mathématiques des ondes électromagnétiques dans la matière de la section 6.5, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \text{Onde incidente } (z > 0) : \quad & \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ & \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Onde réfléchie } (z > 0) : \quad & \mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0'' e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ & \mathbf{B}''(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Onde transmise } (z < 0) : \quad & \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0' e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ & \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Les relations de dispersion

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}''| = n_1\omega/c \quad |\mathbf{k}'| = n_2\omega/c$$

contiennent les **indices de réfraction**

$$n_i = c\sqrt{\varepsilon_i\mu_i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_i\mu_i}{\varepsilon_0\mu_0}}, \quad i = 1, 2. \quad (6.77)$$

Les conditions de bord (6.76) sont valables pour tout \mathbf{r} et tout t sur l'interface. En conséquence, les facteurs de phase doivent être égaux sur toute l'interface $z = 0$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})_{z=0} .$$

Les trois vecteurs \mathbf{k}, \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' sont donc coplanaires.

Avec la notation de FIG. 6.4 cette dernière relation s'écrit

$$k \sin \vartheta = k' \sin \vartheta' = k'' \sin \vartheta'' .$$

En raison de l'égalité des longueurs $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}''|$, l'angle d'incidence doit être égal à l'angle de réflexion. On obtient ainsi la **loi de la réflexion**

$$\vartheta = \vartheta'' . \quad (6.78)$$

La relation entre l'onde incidente et l'onde transmise fournit la **loi de Snell** ou **loi de la réfraction**

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta'} = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} . \quad (6.79)$$

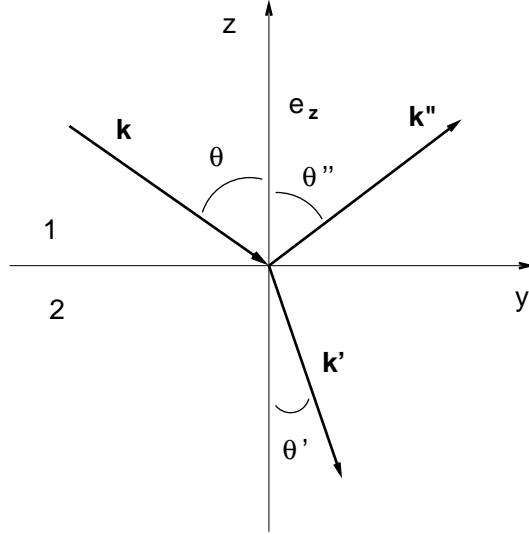


FIGURE 6.4 – Réflexion, réfraction

6.6.3 Intensités et polarisations

Pour le cas considéré au paragraphe précédent, les conditions de bord (6.76) s'écrivent

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon_1(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'') - \varepsilon_2\mathbf{E}_0'] \cdot \mathbf{n} &= 0, \\
 \left[\frac{1}{\mu_1}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'') - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0' \right] \times \mathbf{n} &= 0, \\
 [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0'] \cdot \mathbf{n} &= 0, \\
 [\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0'] \times \mathbf{n} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.80}$$

Nous nous limitons à une polarisation linéaire de vecteurs $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0', \mathbf{E}_0''$ réels et considérons deux cas spéciaux.

a) Polarisation perpendiculaire au plan d'incidence

Si les vecteurs $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0'$ et \mathbf{E}_0'' sont perpendiculaires au plan d'incidence (défini par \mathbf{k} et \mathbf{n} , mais \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' sont aussi parallèles à ce plan), la première des équations (6.80) est automatiquement satisfaite, tandis que les trois autres se ramènent à

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_0 - E_0'') \cos \vartheta - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_0' \cos \vartheta' &= 0, \\
 \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}(E_0 + E_0'') \sin \vartheta - \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}E_0' \sin \vartheta' &= 0, \\
 E_0 + E_0'' - E_0' &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.81}$$

Grâce à la loi de Snell, le déterminant de ce système homogène est égal à 0. Pour simplifier les expressions, nous remplaçons les perméabilités μ_i par μ_0 , ce qui est souvent justifié pour des fréquences ω appartenant au spectre visible de la lumière. On obtient

$$E_0' = \frac{2 \cos \vartheta \sin \vartheta'}{\sin(\vartheta + \vartheta')} E_0,$$

$$E_0'' = -\frac{\sin(\vartheta - \vartheta')}{\sin(\vartheta + \vartheta')} E_0 . \quad (6.82)$$

b) Polarisation parallèle au plan d'incidence

Si les vecteurs \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}'_0 et \mathbf{E}''_0 sont parallèles au plan d'incidence, la troisième équation (6.80) est automatiquement satisfaite, les trois autres se réduisant, à l'aide de la loi de Snell (et pour $\mu_i \approx \mu_0$), au système

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_1}(E_0 + E_0'') - \sqrt{\varepsilon_2}E'_0 &= 0, \\ \cos \vartheta(E_0 - E_0'') - \cos \vartheta' E'_0 &= 0 . \end{aligned} \quad (6.83)$$

La solution est (on utilise des théorèmes d'addition trigonométriques)

$$\begin{aligned} E'_0 &= \frac{2 \cos \vartheta \sin \vartheta'}{\sin(\vartheta + \vartheta') \cos(\vartheta - \vartheta')} E_0, \\ E_0'' &= \frac{\tan(\vartheta - \vartheta')}{\tan(\vartheta + \vartheta')} E_0 . \end{aligned} \quad (6.84)$$

La réflexion est nulle si $\vartheta + \vartheta' = \pi/2$. A l'aide de la loi de Snell, on voit que c'est le cas pour l'**angle de Brewster**

$$\vartheta = \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \approx \arctan \frac{n_2}{n_1} . \quad (6.85)$$

Cet angle peut être utilisé pour produire de la lumière polarisée, puisque pour cet angle, seule la composante avec polarisation perpendiculaire au plan d'incidence est réfléchiée. Pour $n_1 > n_2$, on observe qu'il existe un angle ϑ pour lequel on a une **réflexion totale** ($\vartheta' = \pi/2$); il est donné par la relation

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \approx \frac{n_2}{n_1} . \quad (6.86)$$

Chapitre 7

Rayonnement

Pour calculer les champs produits par des densités $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ dépendantes du temps, il faut tenir compte de la vitesse c finie de propagation de la lumière. Il s'ensuit que le temps d'émission d'un rayonnement est sensiblement différent du temps de détection si le détecteur se trouve à une certaine distance de la source. Mathématiquement, ce délai entre les temps d'émission et de détection est décrit par les potentiels retardés (4.103) et (4.104). La différence est négligeable si la distance Δr entre l'émetteur et le détecteur est suffisamment petite, plus précisément si les changements de ρ et \mathbf{j} pendant le temps $\Delta r/c$ sont négligeables. Mais on s'intéresse souvent à des situations où cette condition n'est pas satisfaite. Pour une fréquence atomique typique $\omega_0 \approx 10^{14} s^{-1}$, on devra tenir compte des effets de retardement lorsque les distances sont de l'ordre $\Delta r \geq c/\omega_0 \approx 3 \times 10^{-6} m$.

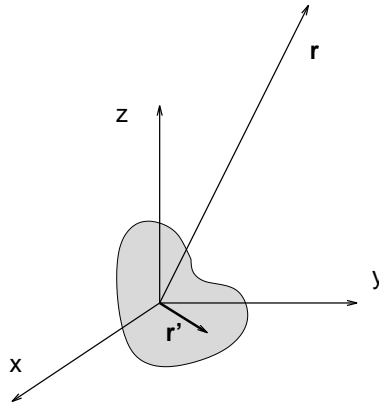


FIGURE 7.1 – Émetteur de dimension $|\mathbf{r}'| \leq a$ et point de détection \mathbf{r}

7.1 Champ de rayonnement

On considère un système rayonnant ou émetteur de taille¹ a . Selon FIG. 7.1, on fixe l'origine des coordonnées à l'intérieur de ce système et on cherche la forme asymptotique des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} en un point

$$r \gg a . \quad (7.1)$$

1. La taille d'un émetteur peut valoir $a \sim 10^{-10} m$ pour un atome et $a \sim 1 m$ pour une antenne.

Il est important de distinguer trois longueurs typiques, la taille de la source a , la distance d'observation r et la longueur d'onde caractéristique λ du champ électromagnétique émis. Dans le problème du rayonnement, on s'intéresse surtout au cas où l'observateur se trouve très loin de la source, $r \gg a$, et où cette distance est aussi supérieure à la longueur d'onde, $r \gg \lambda$. On parle de zone lointaine. Le champ de rayonnement dans cette zone est calculé à l'aide de la limite asymptotique des potentiels retardés (4.103) et (4.104). Alors, pour \mathbf{r}' variant à l'intérieur de l'émetteur de dimension a , on peut utiliser le développement limité

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \left[1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) \right] = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + \dots \quad (7.2)$$

où nous avons introduit le vecteur unitaire

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} .$$

En négligeant les termes d'ordre $1/r^2$ et supérieurs, la forme asymptotique des potentiels retardés (4.103) et (4.104) s'écrit

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3r' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right), \quad (7.3)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right). \quad (7.4)$$

Pour calculer le champ électrique $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$, on utilise les identités

$$\nabla(r) = \mathbf{n} \quad (7.5)$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{n}}{r^2} \quad (7.6)$$

$$\nabla(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') = -\frac{1}{r} [\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'] = -\frac{1}{r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}'). \quad (7.7)$$

Alors, en notant le temps retardé

$$t_r := t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}, \quad (7.8)$$

nous trouvons

$$\nabla \left[\frac{1}{r} \rho(\mathbf{r}', t_r) \right] = -\frac{1}{r^2} \mathbf{n} \rho + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{c} \mathbf{n} - \frac{1}{cr} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}') \right) \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Le premier terme de cette relation est de l'ordre $1/r^2$, le deuxième de l'ordre $1/(r\lambda) = rc/(2\pi\omega_0)$, où ω_0 est la fréquence typique de l'évolution temporelle de ρ . C'est à ce point que nous tenons compte de l'hypothèse $r \gg \lambda$. Dans ce cas le deuxième terme domine et nous utilisons l'approximation

$$\nabla \left[\frac{1}{r} \rho(\mathbf{r}', t_r) \right] \approx -\frac{1}{cr} \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', t_r). \quad (7.9)$$

Le champ électrique devient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}}{cr} \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}', t_r) - \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r).\end{aligned}\quad (7.10)$$

A l'aide de la relation $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ qui, comme en (7.9), donne

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{1}{r} j_\beta(\mathbf{r}', t_r) \right] \approx -\frac{1}{rc} n_\alpha \frac{\partial}{\partial t} j_\beta(\mathbf{r}', t_r),$$

on obtient aussi le champ magnétique,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\mathbf{n}}{r} \times \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r).\quad (7.11)$$

L'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)\quad (7.12)$$

nous permet de simplifier l'expression (7.10) du champ électrique. Cependant, pour les densités de charges et de courants retardées, on observe que la divergence ∇' agit aussi sur t_r , alors que dans (7.12) ∇ ne s'applique qu'à l'argument spatial. Dans ce cas, l'équation de continuité doit s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}', t_r) = -[\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)]_{t_r}\quad (7.13)$$

où la notation du membre de droite signifie que l'on prend la dérivée pour t_r fixé. Pour une divergence s'appliquant sur tout \mathbf{r}' , le calcul fournit l'expression

$$\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) = [\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)]_{t_r} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \cdot \nabla' t_r\quad (7.14)$$

qui permet d'écrire l'équation de continuité (7.13) sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}', t_r) &= -\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \cdot \nabla' t_r \\ &= -\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) + \frac{\mathbf{n}}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r).\end{aligned}\quad (7.15)$$

En insérant (7.15) dans (7.10), on obtient (avec $1/c^2 = \epsilon_0\mu_0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\mu_0 c}{4\pi r} \mathbf{n} \int d^3r' \left(-\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) + \frac{\mathbf{n}}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \right) - \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \left[\mathbf{n} \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \mathbf{n} \times \left(\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) \\ &= -c\mathbf{n} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\quad (7.16)$$

On a utilisé la propriété

$$\int_V d^3r' \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) = \int_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \cdot d\boldsymbol{\sigma}' = 0$$

de la densité de courant limitée à un domaine V fini de l'espace, ainsi que la relation (7.11) avec l'induction magnétique. Les trois vecteurs \mathbf{n} , \mathbf{B} et \mathbf{E} sont donc orthogonaux. On a aussi

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (7.17)$$

$$B^2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} E^2(\mathbf{r}, t). \quad (7.18)$$

Les contributions individuelles des champs électriques et magnétiques à la densité d'énergie $u = (\varepsilon/2)(E^2 + c^2 B^2)$ sont donc égales. Afin d'obtenir l'intensité du rayonnement à une distance r de la source, nous calculons la densité de flux d'énergie donnée par le vecteur de Poynting (défini dans la section 4.2)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (7.19)$$

Dans le cas des champs asymptotiques discutés dans le paragraphe précédent, la condition $r \gg a$ nous donne

$$\mathbf{S} \approx \frac{c}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) = \frac{cB^2}{\mu_0} \mathbf{n}. \quad (7.20)$$

Il s'agit d'un flux radial dirigé vers l'extérieur. Le flux par unité d'angle solide est obtenu en multipliant $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$ par la surface r^2 . Ainsi l'énergie rayonnée par unité de temps et par unité d'angle solide, *i.e.* la **puissance du rayonnement**, vaut

$$\frac{dP}{d\Omega} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} r^2 = \frac{cB^2}{\mu_0} r^2 = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left| \mathbf{n} \times \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \right|^2. \quad (7.21)$$

Ce résultat démontre que le flux traversant une unité d'angle solide ne dépend pas de la distance r , ce qui reflète le fait que l'énergie rayonnée n'est ni accumulée ni anéantie dans l'espace (vide). Nous constatons aussi qu'un courant électrique dépendant du temps est à l'origine du rayonnement. Pour calculer explicitement la puissance rayonnée, il faudra spécifier la source $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)$.

7.2 Modèle simple d'une antenne

Nous considérons un modèle simplifié d'une antenne en supposant qu'elle est constituée d'un conducteur mince de longueur ℓ et qu'elle est parcourue par une densité de courant $\mathbf{j} = (0, 0, j_z)$ de la forme

$$j_z = \begin{cases} I \sin \left[k \left(\frac{\ell}{2} - |z| \right) \right] \delta(x) \delta(y) \sin(\omega t) & \text{pour } |z| < \frac{\ell}{2} \\ 0 & \text{pour } |z| > \frac{\ell}{2}. \end{cases} \quad (7.22)$$

et où l'on a évidemment la relation de dispersion $k = \omega/c$.

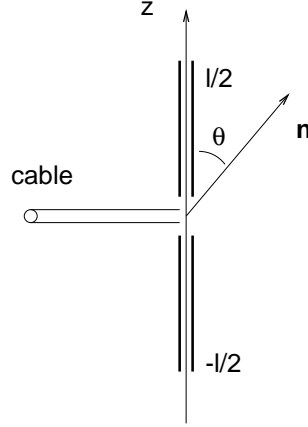


FIGURE 7.2 – Antenne

Le courant est injecté au centre, il est nul aux deux extrémités de l'antenne en $z = \pm\ell/2$. Nous calculons la puissance de rayonnement à l'aide de la formule (7.21) qui avec le choix des coordonnées de FIG. 7.2 s'écrit

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left| \mathbf{n} \times \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \right|^2 = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \sin^2 \vartheta \left| \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t} j_z(\mathbf{r}', t_r) \right|^2$$

où $t_r = t - r/c + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')/c$. Pour le courant donné par (7.22) l'intégrale peut être effectuée et donne

$$\begin{aligned} \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t} j_z(\mathbf{r}', t_r) &= \omega I \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz' \sin \left[k \left(\frac{\ell}{2} - |z'| \right) \right] \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{z'}{c} \cos \vartheta \right) \right] \\ &= \frac{2Ic}{\sin^2 \vartheta} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \left[\cos \left(\frac{k\ell}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left(\frac{k\ell}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Le calcul de la moyenne sur le temps

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (7.23)$$

fournit un facteur 1/2. La puissance moyenne rayonnée vaut alors

$$\begin{aligned} \frac{\overline{dP}}{d\Omega} &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \sin^2 \vartheta \left(\frac{2Ic}{\sin^2 \vartheta} \right)^2 \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{k\ell}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left(\frac{k\ell}{2} \right) \right]^2 \\ &= \frac{\mu_0 I^2 c}{8\pi^2} \left[\frac{\cos \left(\frac{k\ell}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left(\frac{k\ell}{2} \right)}{\sin \vartheta} \right]^2. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Il est instructif de considérer le cas d'une antenne satisfaisant la relation $kl \ll 1$ (ou $\ell \ll c/\omega$). Les effets de retardement à l'intérieur de l'antenne devraient alors être négligeables. En utilisant le développement limité

$$\cos \left(\frac{k\ell}{2} \cos \vartheta \right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k\ell}{2} \cos \vartheta \right)^2 + \dots$$

nous obtenons le résultat simple

$$\frac{\overline{dP}}{d\Omega} \approx \frac{\mu_0 I^2}{32\pi^2 c^3} \left(\frac{\omega \ell}{2}\right)^4 \sin^2 \vartheta. \quad (7.25)$$

Nous verrons dans le paragraphe 7.4 que cette expression correspond à l'émission dipolaire électrique, qui se limite justement au premier terme d'un développement en puissance de a/λ (où a est la taille du système rayonnant). À noter que la puissance émise grandit comme ω^4 avec la fréquence du courant. Nous remarquons aussi que le phénomène inverse de l'émission, l'absorption du rayonnement par une antenne, ne reflète que l'autre aspect de l'interaction entre la lumière et la matière ; l'onde électromagnétique arrivant à l'antenne exerce une force – la force de Lorentz – sur les particules chargées et induit ainsi des courants électriques dans l'antenne.

7.3 Rayonnement d'une charge ponctuelle

Prenons comme autre exemple d'application une particule de charge q qui suit une trajectoire bornée $\mathbf{r}(t)$ et génère par conséquent les densités

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}', t') &= q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') &= q\mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Nous aimerions calculer la puissance rayonnée par unité d'angle solide dans la direction $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ à une distance R de la trajectoire de la particule, où R est supposé être beaucoup plus grand que la taille de la trajectoire. C'est notre hypothèse habituelle. En plus, nous supposons que la vitesse typique de la particule est petite par rapport à c ou, plus précisément, que le temps de passage de l'onde à travers la trajectoire de la particule est beaucoup plus petit que le temps caractéristique du mouvement de la particule (la période ω_0 dans le cas d'un mouvement oscillatoire). Cette hypothèse additionnelle correspond à l'inégalité $l \ll c/\omega$ dans le cas de l'antenne. Elle nous permet de négliger le retardement à l'intérieur de la trajectoire et de faire l'approximation

$$t_r = t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} - \frac{R}{c} \approx t - \frac{R}{c}. \quad (7.27)$$

Le rayonnement est émis au temps $t_e = t - R/c$ et est observé en \mathbf{R} au temps t . À l'aide de cette approximation, nous pouvons facilement calculer l'intégrale (7.21)

$$\begin{aligned} \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) &\approx \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) \\ &= \frac{d}{dt} \int d^3r' \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) = q \frac{d}{dt} \mathbf{v}\left(t - \frac{R}{c}\right) = q \mathbf{a}(t_e), \end{aligned}$$

où $\mathbf{a}(t_e)$ est l'accélération de la particule au temps $t_e = t - R/c$. La relation

$$|\mathbf{n} \times \mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \vartheta,$$

où ϑ est l'angle entre la direction d'observation et l'accélération au temps d'émission, nous permet d'obtenir la puissance du rayonnement par unité d'angle solide (7.21) sous la forme d'un résultat simple

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{(4\pi)^2 c} |\mathbf{a}(t_e)|^2 \sin^2 \vartheta(t_e) . \quad (7.28)$$

L'émission totale par unité de temps à travers une surface sphérique de rayon R est donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu_0 q^2}{(4\pi)^2 c} |\mathbf{a}(t_e)|^2 \int d\Omega \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{\mu_0 q^2}{(4\pi)^2 c} |\mathbf{a}(t_e)|^2 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\mathbf{a}(t_e)|^2 . \end{aligned} \quad (7.29)$$

Il est instructif de relier ce résultat au moment dipolaire, introduit dans la section 6.1 et pour notre exemple donné par

$$\mathbf{p}(t) = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{r}(t) . \quad (7.30)$$

On voit que

$$q\mathbf{a}(t_e) = \frac{d^2\mathbf{p}(t_e)}{dt^2} .$$

La puissance du rayonnement est alors donné par

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left| \mathbf{n} \times \frac{d^2\mathbf{p}(t_e)}{dt^2} \right|^2 , \quad (7.31)$$

une formule que nous retrouverons au paragraphe suivant pour un cas plus général.

7.4 Émission dipolaire

Nous calculons maintenant le champ de rayonnement (zone lointaine, $a \ll r$, $\lambda \ll r$), en admettant que la taille du système n'est pas seulement minuscule par rapport à la distance de l'observateur, mais aussi par rapport à la longueur d'onde. Nous aurons donc l'inégalité $a \ll \lambda \ll r$. Dans ce cas la source se comporte comme un dipôle électrique (dépendant du temps).

Les champs électriques et magnétiques (7.10) et (7.11) et la puissance rayonnée (7.21) sont déterminés par l'intégrale

$$\int d^3r' \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) , \quad (7.32)$$

qu'il s'agit d'évaluer. Nous pouvons imaginer le courant comme résultant du mouvement d'un ensemble de particules chargées et procéder comme au paragraphe précédent. La contribution fournie par le terme $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'/c$ n'est importante que lorsque le temps de propagation à travers l'émetteur est appréciable ou si la fréquence typique est plus grande ou de

l'ordre de c/a . Dans le cas considéré ici nous pourrions de nouveau faire l'approximation appelée **approximation dipolaire électrique**, qui consiste à négliger le terme $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'/c$,

$$\begin{aligned} \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) &\approx \int d^3r' \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int d^3r' \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Cette expression peut être reliée au moment dipolaire électrique. En fait, à l'aide de l'équation de continuité et d'une intégration par parties dont le terme de surface s'annule, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3r' \mathbf{r}' \left[\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_e) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', t_e) \right] \\ &= - \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_e) + \frac{d}{dt} \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_e), \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$t_e = t - r/c. \quad (7.34)$$

On en déduit la relation

$$\int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_e) = \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t_e), \quad (7.35)$$

qui avec (7.33) donne, à l'approximation dipolaire, l'intégrale de rayonnement

$$\int d^3r' \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) \approx \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}(t_e).$$

Les champs asymptotiques (7.11) et (7.16) sont alors donnés par les expressions

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \mathbf{n} \times \left(\mathbf{n} \times \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}(t_e) \right), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &\approx -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \left(\mathbf{n} \times \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}(t_e) \right). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Ces champs décrivent **l'émission dipolaire électrique** dont le flux d'énergie asymptotique vaut

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left| \mathbf{n} \times \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}(t_e) \right|^2, \quad (7.37)$$

en parfait accord avec le résultat obtenu pour le rayonnement d'une particule (lente).

Revenons au cas de l'antenne étudiée dans la section 7.2. À l'aide de l'équation de continuité nous obtenons, dans la limite $k\ell \ll 1$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j_z}{\partial z} \approx Ik\delta(x)\delta(y) \sin \omega t \operatorname{sign} z,$$

ce qui donne pour le moment dipolaire (orienté parallèle à l'axe de l'antenne)

$$\frac{d}{dt} p_z(t) = \int dx \int dy \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} dz z \frac{\partial \rho}{\partial t} = Ik \sin \omega t \left(\frac{\ell}{2} \right)^2$$

et donc

$$\left| \mathbf{n} \times \frac{d^2 \mathbf{p}(t_e)}{dt^2} \right| = Ik\omega \cos \omega t_e \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \sin \vartheta.$$

En insérant cette expression dans (7.37), nous retrouvons pour la moyenne temporelle le résultat (7.25).

7.5 Au-delà des approximations simples

Nous venons de discuter l'approximation électrique dipolaire, valable pour $a \ll \lambda$. Si cette inégalité n'est pas satisfaite, par exemple pour $r \sim \lambda$, il faudra tenir compte du retardement à l'intérieur de la source. Pour ce faire, on peut développer le courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c})$ en puissances de $\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}$. Les premiers termes de ce "développement multipolaire" sont les contributions des moments dipolaires magnétiques et quadrupolaires électriques de la source. Pour plus de détails voir le livre de Jackson.

Dans la "zone proche", $r \ll \lambda$ (mais toujours $r \gg a$), le problème se simplifie de nouveau, il est réduit au calcul du champ instantané (sans effets de retardement). Revenons à la formule générale des potentiels de jauge (4.103) et (4.104). Sans perte de généralité, nous pouvons utiliser les transformées de Fourier

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} f(\mathbf{r}, \omega) \quad (7.38)$$

pour les potentiels retardés \mathbf{A} , Φ et les densités de charge ρ et de courant \mathbf{j} et traiter chaque coefficient de Fourier indépendamment (par linéarité du problème). À l'aide de (4.104) on voit facilement que le potentiel $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$ est déterminé par l'équation

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (7.39)$$

et une relation similaire existe entre Φ et ρ . Dans la zone proche, on peut remplacer $\exp(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = \exp(2\pi i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\lambda)$ par 1. On trouve alors effectivement la même relation entre $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$ et $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ (et donc aussi entre $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$) que dans le cas statique.

Nous avons tout au long de ce chapitre supposé que l'observateur se trouve bien loin de l'émetteur, $a \ll r$. Mais qu'est-ce qui se passe si cette inégalité n'est pas valable? Le théorème de Poynting,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (7.40)$$

indique que près de la source de rayonnement ou à l'intérieur de celle-ci, l'énergie électromagnétique n'est pas seulement émise par le courant électrique, mais elle peut aussi être réabsorbée. Par exemple, le rayonnement émis par un bout d'une antenne peut être réabsorbé par l'autre bout. Pour décrire cette situation, il faudrait traiter explicitement ce type de processus, une tâche bien complexe, qui nécessite une modélisation détaillée de la dynamique de l'émetteur.

Chapitre 8

Électrodynamique et relativité

En 1864, dans un esprit de synthèse remarquable, Maxwell réussit à unifier les phénomènes électriques et magnétiques dans la théorie de l'électrodynamique. À la même époque, on remarqua que la lumière pouvait être représentée par une onde électromagnétique. À la fin du 19^{ème} siècle, les expériences de Michelson qui ont débuté en 1881 montrèrent que la vitesse de la lumière était indépendante du mouvement de la source. Cependant, une question importante ne trouvait pas de réponse : pourquoi l'électrodynamique n'est-elle pas invariante par transformation de Galilée

$$t = t' \quad (8.1)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0 \quad (8.2)$$

où la vitesse \mathbf{v} est constante. On s'en convainc facilement (exercice) en appliquant, par exemple, une telle transformation à l'équation d'onde

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(\mathbf{r}, t) = 0 . \quad (8.3)$$

Doit-on en déduire que l'électrodynamique dépend du référentiel choisi : celui où le support de la lumière est au repos, *i.e.* l'**éther** ? En 1905, Einstein réussit à résoudre ce problème en postulant :

1. Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie.
2. La vitesse de la lumière c est la même dans tous les référentiels d'inertie¹.

Comme nous allons le voir, la conséquence de ces postulats est de fournir des référentiels d'inertie O et O' reliés par une nouvelle transformation qui remplace la transformation de Galilée dans le cas où la vitesse \mathbf{v} entre les référentiels approche la vitesse c de la lumière. L'élément nouveau et révolutionnaire qui en découle est la **non-universalité du temps**. L'électrodynamique retrouve ainsi une relativité de référentiels appelée **relativité d'Einstein** ou relativité restreinte.

1. Einstein a énoncé le deuxième principe de la relativité indépendamment des résultats des expériences que Michelson effectuait à la même époque [voir Am. J. Phys. **37**, 968 (1969)].

8.1 Transformations de Lorentz

On considère deux référentiels d'inertie O et O' . Le référentiel O' se déplace relativement à O avec une **vitesse \mathbf{v} constante**. Quelle est la relation entre O et O' ? Au temps $t = 0$ où $O = O'$, un signal lumineux est émis. Après t secondes, on trouve la situation illustrée par FIG. 8.1, qui permet d'affirmer :

- l'observateur en O voit une sphère de lumière d'équation $\mathbf{r}^2 = c^2t^2$
- l'observateur en O' voit une sphère de lumière d'équation $\mathbf{r}'^2 = c^2t'^2$.

Comme la vitesse c du signal lumineux est la même dans O et O' , on doit admettre

$$t \neq t' . \quad (8.4)$$

Sinon le front d'onde du signal serait décrit par deux sphères de même rayon, l'une contenue dans l'autre, mais de centres O, O' différents. Absurde !

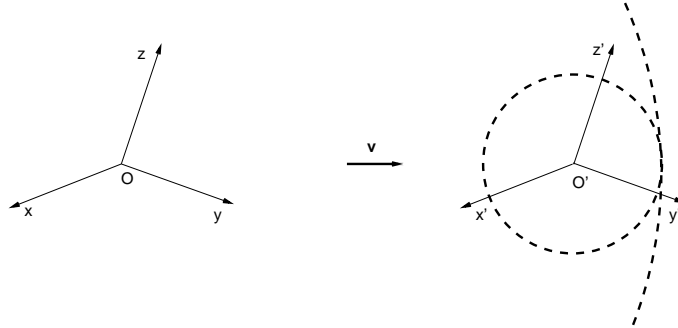


FIGURE 8.1 – Sphères de lumière vues de O et O'

Pour un signal lumineux, on a donc les sphères d'équations

$$S^2 = c^2t^2 - \mathbf{r}^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (8.5)$$

$$S'^2 = c^2t'^2 - \mathbf{r}'^2 = c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0 . \quad (8.6)$$

Cette expérience idéalisée considère en fait deux événements. Le premier consiste en l'émission du signal au point $(0, \mathbf{0})$ et le deuxième en la détection du signal au point (ct, \mathbf{r}) . Si l'on change l'origine du temps et de l'espace, on peut écrire

$$\Delta S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = 0 . \quad (8.7)$$

En outre, on peut concevoir que la distance entre les deux événements ne correspond pas au chemin parcouru par un signal lumineux, mais à celui parcouru par un autre signal de vitesse plus grande ou plus petite que celle de la lumière. Dans ce cas on aura une distance \mathbf{r}^2 différente de $(ct)^2$ et par conséquent $S^2 \neq 0$ et aussi $S'^2 \neq 0$. En raison du signe moins qui apparaît dans la forme quadratique S^2 , on introduit les composantes de temps et d'espace à l'aide de deux quadruplets différents

$$(x^\mu) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \quad (8.8)$$

$$(x_\mu) \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) \quad (8.9)$$

qui permettent l'écriture compacte

$$S^2 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu \quad S'^2 = \sum_{\mu=0}^3 x'^\mu x'_\mu . \quad (8.10)$$

En général, on omet d'écrire le symbole de somme en admettant la **convention de sommation d'Einstein**². Pour passer des composantes x^μ aux composantes x_μ et réciproquement, *i.e.* pour abaisser ou élever les indices, on utilise la matrice appelée **métrique**

$$g = (g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (8.11)$$

On voit tout de suite que

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (8.12)$$

où δ_ν^μ est le symbole de Kronecker. Alors avec la métrique $g_{\mu\nu}$, on peut aussi écrire

$$S^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \quad S'^2 = x'^\mu g_{\mu\nu} x'^\nu . \quad (8.13)$$

Les x^μ s'appellent **composantes contravariantes**, les x_μ **composantes covariantes**. La notation³ que nous venons d'introduire repose sur une structure algébrique précise qui sera développée dans le cours *Méthodes mathématiques de la physique*. Pour ce qui nous concerne ici, la connaissance de la notation suffit. Pour des raisons pratiques, on introduit aussi une **notation bloc** de vecteur colonne de \mathbb{R}^4

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} . \quad (8.14)$$

Quelle est la transformation de coordonnées qui relie O à O' ? Dans un référentiel d'inertie où $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, les trajectoires sont données par des droites que la transformation de O à O' doit conserver. De plus, on ne s'intéresse qu'à des différences de coordonnées. Ainsi, la transformation cherchée doit être linéaire et homogène

$$X' = \Lambda X \quad (8.15)$$

où $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ est une matrice⁴ 4×4 à déterminer. En composantes, on a

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu . \quad (8.16)$$

2. La convention de sommation d'Einstein consiste à admettre la sommation implicite sur les indices répétés dans un produit

$$\sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu \equiv x^\mu x_\mu .$$

3. On rencontre parfois une autre notation $(x_\mu) = (x, y, z, ict)$. Dans ce cas, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ et les deux sortes de composantes ne sont plus nécessaires.

4. Avec le choix de cette notation des indices décalés, il est possible d'introduire une écriture cohérente des composantes et d'utiliser la position des indices pour définir la matrice inverse.

La relation (8.13) s'écrit

$$S'^2 = X'^T g X' = X^T \Lambda^T g \Lambda X = X^T B X = 0 \quad (8.17)$$

où $B = B^T$. Que vaut B ? Comme les facteurs x^{j^2} , $|r|x^j$, $x^j x^k$ pour $j \neq k = 1, 2, 3$ sont linéairement indépendants et que $r^2 = c^2 t^2$, on en déduit (exercice)

$$B_{jj} = -B_{00} \quad B_{0j} = 0 \quad B_{jk} = 0, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Des 10 composantes indépendantes de la matrice symétrique B , il ne reste donc que B_{00} et B_{jj} qui sont égaux au signe près. En raison de l'isotropie de l'espace, B_{00} ne peut dépendre que de la norme de la vitesse \mathbf{v} entre les référentiels O et O' . D'où l'expression

$$S'^2 = X^T \Lambda^T g \Lambda X = B_{00} X^T g X = b(v) X^T g X = b(v) S^2. \quad (8.18)$$

Si l'on considère le référentiel O' avec une vitesse \mathbf{v} relativement à O et le référentiel O avec une vitesse $-\mathbf{v}$ relativement à O' , on peut écrire les relations

$$S'^2 = b(v) S^2 \quad S^2 = b(v) S'^2$$

qui fixent $b(v) = 1$. Alors (8.18) définit une grandeur qui ne change pas de forme lorsque l'on passe de O à O' et que l'on appelle **invariant fondamental**

$$S'^2 = S^2. \quad (8.19)$$

On peut l'écrire sous la forme explicite

$$X^T \Lambda^T g \Lambda X = X^T g X$$

valable pour tout X et déduire que la transformation linéaire

$$X' = \Lambda X \quad (8.20)$$

appelée **transformation de Lorentz** est caractérisée par une matrice Λ telle que

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \quad (8.21)$$

L'ensemble des **matrices de Lorentz** Λ , noté

$$L = \left\{ \Lambda \mid \Lambda^T g \Lambda = g \right\}. \quad (8.22)$$

forme le **groupe de Lorentz**. De la relation (8.21), on tire

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad \Lambda^{-1} = g \Lambda^T g. \quad (8.23)$$

En outre, la composante g_{00} de la relation (8.21) conduit à l'équation

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{j=1}^3 (\Lambda^j_0)^2$$

qui fournit les valeurs limites

$$\Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{ou} \quad \Lambda^0_0 \leq -1. \quad (8.24)$$

Alors, suivant que $\det \Lambda = +1$ ou $\det \Lambda = -1$ (signe + ou signe -) et que $\Lambda^0_0 \geq 1$ ou $\Lambda^0_0 \leq -1$ (flèche en haut ou flèche en bas), on peut distinguer quatre sous-ensembles

$$L_+^\uparrow \quad L_-^\uparrow \quad L_+^\downarrow \quad L_-^\downarrow . \quad (8.25)$$

L'ensemble

$$L_+^\uparrow = \left\{ \Lambda \mid \Lambda^T g \Lambda = g, \quad \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det \Lambda = +1 \right\} \quad (8.26)$$

forme le **groupe de Lorentz propre**. La condition $\Lambda^0_0 \geq 1$ signifie que l'on conserve le sens du temps et la condition $\det \Lambda = +1$ que l'on ne considère que les rotations propres. Les trois autres ensembles (8.25) ne forment pas des groupes puisqu'ils ne contiennent pas l'élément neutre représenté par la matrice identité.

On peut passer maintenant à la détermination des composantes de la matrice de Lorentz $\Lambda \in L_+^\uparrow$ dans le cas où elle a la forme simple

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (8.27)$$

De la relation (8.21) $\Lambda^T g \Lambda = g$, on tire les trois conditions indépendantes

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 = 1 \quad (\Lambda^0_1)^2 - (\Lambda^1_1)^2 = -1 \quad (\Lambda^0_0)(\Lambda^0_1) - (\Lambda^1_0)(\Lambda^1_1) = 0 .$$

De ces relations et de la condition $\det \Lambda = 1$, on tire (exercice) les composantes

$$\Lambda^0_0 = \cosh \chi \geq 1 \quad \Lambda^0_1 = -\sinh \chi \quad (8.28)$$

$$\Lambda^1_0 = -\sinh \chi \quad \Lambda^1_1 = \cosh \chi . \quad (8.29)$$

De plus, pour un point matériel situé à l'origine O' *i.e.* tel que $x' = y' = z' = 0$ et $x = vt, y = 0 = z$, la transformation $X' = \Lambda X$ fournit la relation

$$0 = -\sinh \chi ct + \cosh \chi x = -\sinh \chi ct + \cosh \chi vt$$

qui détermine la variable χ

$$\tanh \chi = \frac{v}{c} = \beta . \quad (8.30)$$

A l'aide d'identités trigonométriques, on déduit

$$\sinh \chi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} . \quad (8.31)$$

Finalement, la matrice de Lorentz pour $\mathbf{v} \parallel O_x$ prend la forme

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (8.32)$$

et la **transformation de Lorentz** $X' = \Lambda X$ s'écrit explicitement

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \beta x/c) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \quad z' = z . \end{aligned} \quad (8.33)$$

La courbe tracée sur FIG. 8.2, montre que γ ne prend de l'importance que pour des valeurs de β proches de 1, *i.e.* pour des vitesses proches de celle la lumière. Pour \mathbf{v} de direction quelconque, on détermine les éléments de la matrice de Lorentz en décomposant \mathbf{r} en une partie parallèle et une partie perpendiculaire à \mathbf{v}

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \quad (8.34)$$

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} . \quad (8.35)$$

En appliquant la transformation de Lorentz (8.33) à chacune de ces composantes et en notant $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, on obtient

$$t' = \gamma(t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}/c) \quad (8.36)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{1}{\beta^2}(\gamma - 1)(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct . \quad (8.37)$$

D'où l'on peut extraire la matrice correspondante. A la limite $\beta \ll 1$, on retrouve la transformation de Galilée (8.2).

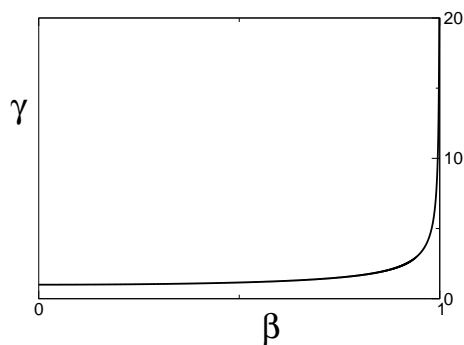


FIGURE 8.2 – Comportement de $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$

En composant deux transformations successives de vitesses parallèles à l'axe x où O'' a une vitesse \mathbf{v}_2 par rapport à O' qui a lui-même une vitesse \mathbf{v}_1 par rapport à O , on obtient

$$X'' = \Lambda(v_2)\Lambda(v_1)X . \quad (8.38)$$

La multiplication de ces deux matrices nous permet de déduire (exercice) la **loi de composition des vitesses** qui fournit la vitesse de O'' ($x'' = 0$) par rapport à O

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} . \quad (8.39)$$

Pour $v_1, v_2 \ll c$, on retrouve évidemment l'expression classique. De plus, on montre (exercice) que pour $v_1, v_2 \leq c$, la vitesse composée satisfait la condition $v \leq c$. La loi de composition des vitesses pour des référentiels se déplaçant dans des directions quelconques est décrite sur FIG. 8.3 et est donnée par la formule

$$\mathbf{v} = \frac{1}{1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2} \left\{ \left[1 + \left(1 - \sqrt{1 - \beta_1^2} \right) \frac{\boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2}{\beta_1^2} \right] \mathbf{v}_1 + \sqrt{1 - \beta_1^2} \mathbf{v}_2 \right\} . \quad (8.40)$$

Pour établir cette expression, on calcule (exercice) à partir de (8.37) $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ en définissant $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}'/dt'$ et $\mathbf{v}_1/c = \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1$. Cette manière de faire est certainement moins fastidieuse que la multiplication des matrices correspondantes.

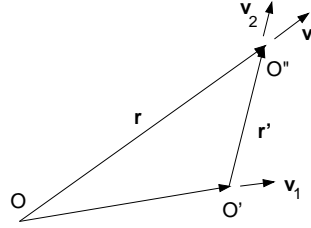


FIGURE 8.3 – Composition de deux vitesses quelconques

8.2 Scalaires, quadrivecteurs et tenseurs

Jusqu'à maintenant nous avons utilisé essentiellement la notation bloc. Les relations que l'on rencontre en relativité s'expriment plus couramment en composantes. Dans cette écriture, les définitions d'invariant, de vecteur, de tenseur telles qu'utilisées par le physicien deviennent naturelles. Ecrivons d'abord la transformation de Lorentz (8.20) en composantes

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} . \quad (8.41)$$

La matrice de Lorentz (Λ^{μ}_{ν}) satisfait la relation (8.21) qui en composantes devient

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu} g_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\nu} = g_{\mu\nu} . \quad (8.42)$$

Pour les composantes covariantes, on a la transformation

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu} . \quad (8.43)$$

En effet, par abaissement et relèvement des indices, on obtient l'expression

$$x'_{\mu} = g_{\mu\kappa} x'^{\kappa} = g_{\mu\kappa} \Lambda^{\kappa}_{\rho} x^{\rho} = g_{\mu\kappa} \Lambda^{\kappa}_{\rho} g^{\rho\nu} x_{\nu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu} \quad (8.44)$$

où l'on a introduit la nouvelle matrice

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\kappa} \Lambda^{\kappa}_{\rho} g^{\rho\nu} . \quad (8.45)$$

On remarque que, la position des indices de cette nouvelle matrice correspond à l'action de la métrique sur chacun des indices de l'ancienne matrice. A l'aide de la relation fondamentale (8.42), le produit de cette matrice avec la transposée de (Λ^{μ}_{ν}) donne

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\rho} = \Lambda^{\mu}_{\nu} g_{\mu\kappa} \Lambda^{\kappa}_{\sigma} g^{\sigma\rho} = g_{\nu\sigma} g^{\sigma\rho} = \delta_{\nu}^{\rho} . \quad (8.46)$$

En observant la position de l'indice μ de la multiplication ligne-colonne, on en déduit que la matrice (Λ_μ^ν) est l'inverse transposée de (Λ^μ_ν)

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \Lambda_\nu^\mu . \quad (8.47)$$

On peut aussi le vérifier en écrivant en composantes la relation (8.23) de l'inverse Λ^{-1} . Pour \mathbf{v} parallèle à O_x (Λ_μ^ν) est tirée de (Λ^μ_ν) (8.32) en remplaçant β par $-\beta$. La transformation inverse de (8.41) est donnée par

$$x^\rho = \Lambda_\mu^\rho x'^\mu \quad (8.48)$$

comme on peut le voir en appliquant à (8.41) l'inverse transposée (Λ_μ^ρ) pour obtenir

$$\Lambda_\mu^\rho x'^\mu = \Lambda_\mu^\rho \Lambda^\mu_\nu x^\nu = \delta_\nu^\rho x^\nu = x^\rho . \quad (8.49)$$

De même, la transformation inverse de (8.43) est obtenue par application de Λ^μ_ρ qui donne

$$x_\rho = \Lambda^\mu_\rho x'_\mu . \quad (8.50)$$

Il reste à définir les grandeurs mathématiques qui ont des propriétés de transformation simples lorsque l'on passe de O à O' . De manière générale, ces grandeurs sont des fonctions des quatre coordonnées x^μ , $\mu = 0, \dots, 3$ que l'on note simplement x lorsqu'elles représentent les arguments de la fonction.

Un **scalaire** ou tenseur d'ordre 0 ou fonction scalaire⁵ $\varphi(x)$ est une grandeur invariante par transformation de Lorentz

$$\varphi'(x') = \varphi(x) . \quad (8.51)$$

On a par exemple l'invariant fondamental S^2 , comme on peut le vérifier

$$S'^2 = x'^\mu g_{\mu\nu} x'^\nu = \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta x^\beta = x^\alpha \Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta x^\beta = x^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta = S^2 . \quad (8.52)$$

Un **quadrivecteur contravariant** (V^μ) ou tenseur contravariant d'ordre 1 est un quadruplet dont les composantes se transforment selon l'équation (8.41)

$$V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu \quad (8.53)$$

Un **quadrivecteur covariant** (V_μ) ou tenseur covariant d'ordre 1 est un quadruplet dont les composantes se transforment selon l'équation (8.43)

$$V'_\mu = \Lambda_\mu^\nu V_\nu \quad (8.54)$$

Un **tenseur contravariant d'ordre 2** $(T^{\mu\nu})$ peut alors être défini⁶ de manière naturelle par la transformation

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta} . \quad (8.55)$$

Un **tenseur mixte d'ordre 2** (T^μ_ν) est défini par la transformation

$$T'^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda_\nu^\gamma T^\alpha_\gamma \quad (8.56)$$

5. L'argument x de la fonction $\varphi(x)$ représente les quatre composantes du quadrivecteur.

6. En mathématiques, les tenseurs d'ordre 2 sont définis comme formes bilinéaires. On montre l'équivalence avec la définition du physicien en effectuant un changement de base (voir cours : *Méthodes mathématiques de la physique*).

et de même pour le tenseur $(T_\mu{}^\nu)$

$$T_\mu{}^\nu = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda^\nu{}_\gamma T_\alpha{}^\gamma . \quad (8.57)$$

Un **tenseur covariant d'ordre 2** $(T_{\mu\nu})$ est défini par la transformation

$$T'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma T_{\rho\sigma} . \quad (8.58)$$

Ces définitions peuvent évidemment être généralisées à des tenseurs d'ordre supérieur. Les dérivées d'un champ scalaire $\varphi(x)$ donnent un quadrivecteur. En effet, par dérivation en chaîne et en vertu de la transformation de coordonnées (8.48), on a

$$\frac{\partial\varphi'(x')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\rho{}^\nu \delta_\mu^\rho \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\nu} . \quad (8.59)$$

On remarque ainsi que les dérivées par rapport aux coordonnées contravariantes se transforment comme des composantes covariantes. Pour des raisons évidentes de simplicité et pour plus de clarté dans l'écriture, on note

$$(\partial_\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad (\partial^\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \quad (8.60)$$

Avec cette notation, on voit manifestement que la dérivée par rapport aux composantes contravariantes est un vecteur covariant

$$\partial'_\mu \varphi' = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \varphi . \quad (8.61)$$

De même, les dérivées par rapport aux coordonnées covariantes sont des composantes contravariantes, puisqu'à l'aide de (8.50) on montre que

$$\partial'^\mu \varphi' = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu \varphi \quad (8.62)$$

où l'on a noté $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$. La dérivée d'un vecteur $V^\mu(x)$ donne un tenseur d'ordre 2 puisque

$$\partial'_\mu V'^\nu(x') = \Lambda_\mu{}^\alpha \partial_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta V^\beta(x) = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \partial_\alpha V^\beta(x) . \quad (8.63)$$

En conséquence, la divergence d'un quadrivecteur $V^\mu(x)$ est invariante par transformation de Lorentz puisque

$$\partial'_\mu V'^\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\mu{}_\nu \partial_\rho V^\nu(x) = \delta_\nu^\rho \partial_\rho V^\nu(x) = \partial_\nu V^\nu(x) . \quad (8.64)$$

Pour le cas spécial de la divergence du quadrivecteur $\partial^\mu \varphi$, on obtient

$$\partial'_\mu \partial'^\mu \varphi'(x') = \partial_\mu \partial^\mu \varphi(x) .$$

Par définition, on a

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 = -\square \quad (8.65)$$

et on en déduit que l'opérateur de d'Alembert est un invariant, *i.e.* $\square' = \square$.

On termine cette section sur les tenseurs en montrant, par un premier exemple simple, l'utilité du calcul tensoriel. Son intérêt deviendra plus évident lorsque l'on discutera la covariance des équations de Maxwell.

Exemple : Effet Doppler

Si l'on admet que la phase

$$k^\mu x_\mu \equiv \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (8.66)$$

d'une onde plane $\exp i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]$, $k = \omega/c$ est un invariant de Lorentz *i.e.* ne change pas lorsque l'on passe d'un référentiel O à un référentiel O' , on peut montrer (exercice) que le quadruplet $(k^\mu) = (\omega/c, \mathbf{k})$ est un quadrivecteur. Par conséquent, k^μ est soumis aux transformations de Lorentz $k'^\mu = \Lambda^\mu_\nu k^\nu$. Pour un émetteur de vitesse v situé en O' , on en déduit (exercice) la formule de l'effet Doppler

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \vartheta') \quad (8.67)$$

et la relation entre les angles dans O et O'

$$\cos \vartheta = \frac{\beta + \cos \vartheta'}{1 + \beta \cos \vartheta'} \quad (8.68)$$

où $\vartheta' = \angle(\mathbf{k}', \mathbf{v})$ et \mathbf{v} et $\vartheta = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{v})$. Les cas particuliers de l'effet Doppler longitudinal $\vartheta = 0, \pi$ et transversal $\vartheta = \pi/2$, relativiste et non relativiste en découlent immédiatement.

8.3 Électrodynamique covariante

Pour montrer la covariance relativiste des équations de l'électrodynamique, il faut les reformuler en composantes vectorielles (ou tensorielles) par des équations du type

$$V^\mu(x) = W^\mu(x),$$

où $V^\mu(x)$ et $W^\mu(x)$ sont les composantes de quadrivecteurs. Cette équation est automatiquement invariante de forme, puisqu'en appliquant une transformation de Lorentz, on peut écrire

$$V'^\mu(x') = W'^\mu(x').$$

Cette invariance de forme ou **covariance** n'empêche pas que les fonctions $V'^\mu(x)$ sont en général différentes des $V^\mu(x)$.

Les seuls exemples de quadrivecteurs que nous connaissons pour l'instant sont (x^μ) et (dx^μ) . Ils vont servir de point de départ à notre démarche qui s'attache d'abord à montrer que les quatre composantes constituées par les densités de charge et de courant

$$(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j}) \quad (8.69)$$

forment le **quadrivecteur courant**. La forme de l'équation de continuité

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

que l'on peut écrire

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (8.70)$$

nous laisse penser qu'il doit en être ainsi. Pour le prouver, nous utilisons d'une part l'invariance de Lorentz du quadri-volume

$$\begin{aligned} cdt' dx' dy' dz' &= |\det \Lambda| cdt dx dy dz \\ &= cdt dx dy dz \end{aligned} \quad (8.71)$$

et d'autre part la conservation, par transformation de Lorentz, de la charge dans un volume élémentaire et du courant à travers une surface élémentaire. La charge contenue dans $dx dy dz$ est la même que celle contenue dans $dx' dy' dz'$. Le courant traversant la surface $dy dz$ pendant le temps dt dans la direction x est le même que celui traversant la surface $dy' dz'$ pendant dt' dans la direction x' et ainsi de suite pour les autres directions. Explicitement, on peut écrire

$$c\rho'(x', y', z', t') dx' dy' dz' = c\rho(x, y, z, t) dx dy dz, \quad (8.72)$$

$$\begin{aligned} j'_{x'}(x', y', z', t') dt' dy' dz' &= j_x(x, y, z, t) dt dy dz, \\ j'_{y'}(x', y', z', t') dt' dz' dx' &= j_y(x, y, z, t) dt dz dx, \\ j'_{z'}(x', y', z', t') dt' dx' dy' &= j_z(x, y, z, t) dt dx dy. \end{aligned} \quad (8.73)$$

En comparant chacune des relations (8.72) et (8.73) à la relation (8.71), nous déduisons que $c\rho$ se transforme comme cdt et que j_x, j_y, j_z se transforment comme dx, dy, dz . Les composantes j^μ définies par (8.69) forment donc, comme dx^μ un quadrivecteur contravariant. On peut passer aux équations de Maxwell en considérant des potentiels Φ et \mathbf{A} . Le choix de la jauge de Lorentz $\nabla \cdot \mathbf{A} + (1/c^2)\partial_t \Phi = 0$, nous conduit aux équations (4.85) et (4.86) qui peuvent s'écrire

$$\square A^\mu(x) = -\mu_0 j^\mu(x) \quad (8.74)$$

si l'on introduit les 4 composantes du **champ de jauge**

$$(A^\mu) = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A} \right). \quad (8.75)$$

Puisque j^μ est un quadrivecteur et que le d'Alembertien \square est un scalaire, l'équation (8.74) ne conserve son sens que si la grandeur A^μ est aussi un quadrivecteur. Alors, l'équation (8.74) est invariante de forme ou covariante et devient dans O'

$$\square' A'^\mu(x') = -\mu_0 j'^\mu(x'). \quad (8.76)$$

La jauge de Lorentz est définie par l'invariant

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0. \quad (8.77)$$

Les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ contiennent 6 composantes indépendantes qui ne peuvent pas être représentées par un quadrivecteur. Cependant, on se souvient qu'ils dérivent des champs $\Phi(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ comme le montrent les équations (4.77) et (4.76). Par exemple, les composantes x donnent

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}A_x = \frac{\partial}{\partial x_1}cA^0 - \frac{\partial}{\partial x_0}cA^1 \quad (8.78)$$

$$B_x = \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y = -\frac{\partial}{\partial x_2}A^3 + \frac{\partial}{\partial x_3}A^2 \quad (8.79)$$

et de même pour les autres composantes y et z . Ces relations nous amènent à définir une grandeur tensorielle appelée **tenseur champ** qui contient les champs \mathbf{E} et \mathbf{B}

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu . \quad (8.80)$$

La grandeur $F^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique et a donc la propriétés $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Il possède ainsi 6 composantes indépendantes *i.e.* autant qu'il en faut pour contenir les composantes des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . Grâce aux relations (8.78) et (8.79), on peut l'écrire explicitement sous la forme d'une matrice

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} . \quad (8.81)$$

En tenant compte du fait que ∂_μ est un vecteur covariant et que A^μ est un vecteur contravariant, on obtient la transformation du tenseur champ

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta [\partial^\alpha A^\beta(x) - \partial^\beta A^\alpha(x)] = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}(x) . \quad (8.82)$$

Pour des référentiels de vitesse relative \mathbf{v} parallèle à l'axe x , cette transformation nous permet, pour \mathbf{E} et \mathbf{B} donnés dans O , de déterminer par simple multiplication matricielle les champs \mathbf{E}' et \mathbf{B}' dans le référentiel O' . Comme on peut facilement le vérifier, le calcul donne (exercice)

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) . \end{aligned} \quad (8.83)$$

Ainsi, il apparaît que des composantes qui sont nulles dans un référentiel peuvent être différentes de zéro dans l'autre. Aussi bien le champ \mathbf{E} que le champ \mathbf{B} peuvent donc se manifester comme un effet relativiste. Pour le passage d'un référentiel O à un référentiel O' de vitesse \mathbf{v} quelconque, on a les transformations vectorielles

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + (1 - \gamma)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} \quad (8.84)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v}/c^2 \times \mathbf{E}) + (1 - \gamma)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})\mathbf{n} . \quad (8.85)$$

Ces relations sont tirées de (8.83) en décomposant \mathbf{E} et \mathbf{B} en parties parallèles et perpendiculaires à $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ (exercice) .

Exemple : Champs \mathbf{E} et \mathbf{B} d'une charge q en mouvement rectiligne uniforme

L'utilité des transformations (8.83) se rencontre, par exemple, dans le calcul du champ électromagnétique produit par une particule chargée en mouvement rectiligne uniforme. Un système O' , de charge q en son centre, se déplace à la vitesse $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ constante. Que vaut le champ électromagnétique en un point P fixé par $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ dans le référentiel au repos O ? Nous supposons que les deux systèmes coïncident au temps $t = 0 = t'$. Alors, après t' secondes et comme le montre FIG. 8.4, le point P se situe en $\mathbf{r}' = (-vt', 0, z')$ par

rapport au système O' . La charge q au repos dans O' crée autour d'elle un champ purement coulombien qui vaut

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} -vt' \\ 0 \\ z' \end{bmatrix} \frac{1}{(z'^2 + v^2 t'^2)^{3/2}} . \quad (8.86)$$

Le champ d'induction magnétique est identiquement nul, $\mathbf{B}' = 0$. Pour déterminer les champs dans O , on a besoin de l'inverse de (8.83) que l'on peut obtenir en remplaçant la vitesse v par $-v$ dans les formules et en échangeant les champs \mathbf{E} et \mathbf{E}' ainsi que les champs \mathbf{B} et \mathbf{B}' . De plus, les transformations de Lorentz (8.33) fournissent, pour $x = 0 = y$, les coordonnées dans O

$$t' = \gamma t \quad z' = z . \quad (8.87)$$

Ainsi, pour $\mathbf{B}' = 0$ et \mathbf{E}' donné par (8.86), l'inverse de (8.83) fournit les champs électromagnétiques \mathbf{E} et \mathbf{B} de O

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{(z^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} & B_x &= 0 \\ E_y &= 0 & B_y &= -\frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\gamma vz}{(z^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ E_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{(z^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} & B_z &= 0 . \end{aligned} \quad (8.88)$$

On remarque donc que le calcul des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} d'une particule chargée en mouvement peut être effectué facilement à partir du référentiel où la charge est au repos. L'apparition du champ d'induction magnétique \mathbf{B} n'est pas surprenante puisque l'on sait qu'une charge en mouvement produit un courant. Enfin, il faut constater que la démarche efficace que nous venons d'utiliser pour le calcul des champs n'est applicable qu'à des particules de vitesse \mathbf{v} constante qui peuvent servir de référentiel de Lorentz. Pour des particules accélérées, il faut utiliser les formules des potentiels retardés. Dans ce cas, on parle de **potentiels de Lienard-Wiechert**. Ils ont été utilisés, en particulier, pour le calcul des champs produits par une particule en mouvement rectiligne uniforme. Le résultat est donné par les formules (4.109) et (4.110) qui correspondent évidemment à (8.88).

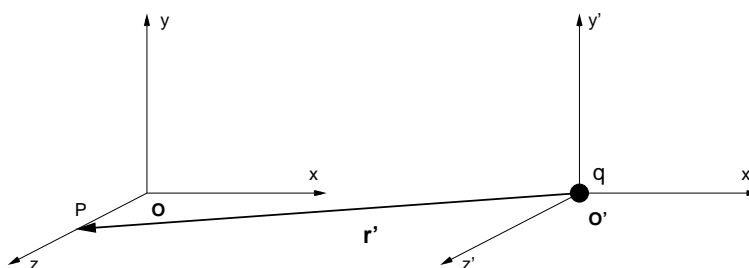


FIGURE 8.4 – Champ d'une charge q en mouvement

A partir de la forme explicite du tenseur champ (8.81), il est facile de vérifier (exercice) que les équations de Maxwell inhomogènes s'écrivent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \mu_0 j^\nu(x) . \quad (8.89)$$

De même, les équations de Maxwell homogènes peuvent s'écrire (exercice) sous les trois formes équivalentes suivantes

$$\begin{aligned}\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= 0 \\ \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \partial_\nu F_{\kappa\lambda} &= 0 \\ \partial_\mu {}^* F^{\mu\nu} &= 0\end{aligned}\tag{8.90}$$

où l'on a introduit la grandeur

$${}^* F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda}\tag{8.91}$$

appelée tenseur dual. Le symbole ou tenseur complètement antisymétrique $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = -\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$ est défini par

$$\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{permutation paire de (0123)} \\ -1 & \text{permutation impaire de (0123)} \\ 0 & \text{2 indices au moins sont égaux .} \end{cases}$$

L'équation des jauge peut aussi être déduite très facilement des équations de Maxwell inhomogènes en dérivant le tenseur champ $F^{\mu\nu}$ (8.80). Le calcul donne

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j^\nu(x) .$$

En considérant la commutativité des dérivées et la définition de l'opérateur de d'Alembert $\square = -\partial_\mu \partial^\mu$, on obtient l'équation des jauge

$$\square A^\nu + \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = -\mu_0 j^\nu .\tag{8.92}$$

En outre, la transformation de jauge s'écrit

$$\tilde{A}^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) .\tag{8.93}$$

On vérifie facilement qu'elle laisse le tenseur champ $F^{\mu\nu}(x)$ inchangé. En effet, en tenant compte de la commutativité des dérivées, on a

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu \partial^\mu \chi = F^{\mu\nu} .$$

Avec la condition de jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, l'équation (8.92) prend la forme simple

$$\square A^\nu = -\mu_0 j^\nu .\tag{8.94}$$

Comme on l'a fait précédemment, on montre que pour A^μ donné, il existe une fonction χ telle que la condition de jauge soit satisfaite.

Chapitre 9

Mécanique relativiste

La théorie de la relativité restreinte d'Einstein fait de l'électrodynamique une théorie covariante *i.e.* indépendante du référentiel d'inertie choisi. Elle exerce aussi son influence sur le mouvement d'un point matériel. Toutefois, les effets que l'on peut estimer se limitent essentiellement à la cinématique des particules élémentaires. Ce chapitre introduit les notions de base de la mécanique relativiste. Pour ce qui concerne la théorie de la gravitation d'Einstein ou théorie de la relativité générale, on se référera au cours spécialisé.

9.1 Cône de lumière

On appelle **événement**, ce qui se passe en un instant donné et en un point donné de l'espace. La position des événements dans l'espace quadridimensionnel peut être représentée géométriquement par le **cône de lumière** décrit par FIG. 9.1.

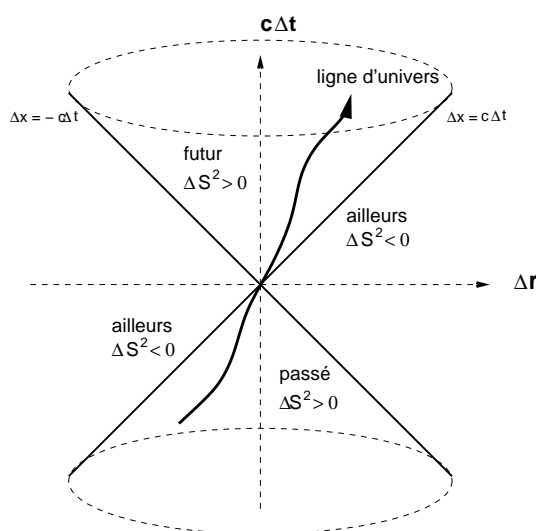


FIGURE 9.1 – Cône de lumière

La grandeur

$$\Delta S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 \equiv c^2\Delta t^2 - \Delta \mathbf{r}^2 \quad (9.1)$$

est un invariant *i.e.* $\Delta S^2 = \Delta S'^2$, comme on l'a vu en (8.19). Suivant la nature du signal

transmis entre les événements, elle peut théoriquement prendre les valeurs

$$\Delta S^2 > 0 \quad \Delta S^2 = 0 \quad \Delta S^2 < 0 . \quad (9.2)$$

Les événements d'un référentiel possèdent des propriétés qu'il convient de définir :

Deux événements de O **coïncident** dans l'espace, si $\Delta \mathbf{r} = 0$
 Deux événements de O sont **simultanés**, si $\Delta t = 0$

A ce stade, deux questions naturelles doivent être posées. Quelles conditions doit satisfaire un référentiel dans lequel les événements coïncident ? Quelles conditions doit satisfaire un référentiel dans lequel les événements sont simultanés ?

1. Un référentiel O' où des événements coïncident ($\Delta \mathbf{r}' = 0$) ne peut exister que si O se situe dans le **passé** ou dans le **futur**, *i.e.* si $\Delta S^2 > 0$.
 En effet, $\Delta \mathbf{r}' = 0$ implique $\Delta S^2 = \Delta S'^2 = c^2 \Delta t'^2 > 0$.

Dans ce cas où $c^2 \Delta t'^2 > \Delta \mathbf{r}^2$, on dit que Δx^μ est un intervalle du **genre temps** et la distance $|\Delta \mathbf{r}|$ qui sépare deux événements est parcourue à une vitesse de signal inférieure à la vitesse de la lumière

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} < c . \quad (9.3)$$

2. Un référentiel O' où les événements sont simultanés ($\Delta t' = 0$) ne peut exister que si O se situe **ailleurs**, *i.e.* si $\Delta S^2 < 0$.
 En effet, $\Delta t' = 0$ implique $\Delta S^2 = \Delta S'^2 = -\Delta \mathbf{r}'^2 < 0$.

Dans ce cas où $\Delta \mathbf{r}^2 > c^2 \Delta t'^2$, on dit que Δx^μ est un intervalle du **genre espace** et la distance $|\Delta \mathbf{r}|$ qui sépare deux événements doit être parcourue à une vitesse de signal supérieure à la vitesse de la lumière

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} > c . \quad (9.4)$$

Les événements n'ont plus de relation de cause à effet.

3. Un référentiel O' où les événements à la fois coïncident ($\Delta \mathbf{r}' = 0$) et sont simultanés ($\Delta t' = 0$) ne peut exister que si O se situe sur le cône de lumière, *i.e.* si $\Delta S^2 = 0$.
 En effet, les conditions $\Delta \mathbf{r}' = 0$ et $\Delta t' = 0$ impliquent $\Delta S^2 = \Delta S'^2 = 0$.

Dans ce cas où $c^2 \Delta t'^2 = \Delta \mathbf{r}^2$, on dit que Δx^μ est un intervalle **isotrope**. La distance $|\Delta \mathbf{r}|$ qui sépare deux événements est parcourue à la vitesse c de la lumière

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = c . \quad (9.5)$$

De manière générale, on dit que V^μ est un quadrivecteur du genre temps si $V^\mu V_\mu > 0$ et que W^μ est un quadrivecteur du genre espace si $W^\mu W_\mu < 0$. Attention, ces définitions dépendent du choix de $g^{\mu\nu}$ *i.e.* de la définition des composantes du quadrivecteur.

Avant de clore cette section, examinons, à l'aide des transformations de Lorentz (8.33) pour $\mathbf{v} \parallel O_x$, les relations qui existent entre des intervalles d'espace et entre des intervalles de temps de deux référentiels O et O' . Pour deux événements, on a les transformations

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x) \quad (9.6)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \quad (9.7)$$

$$\Delta y' = \Delta y \quad \Delta z' = \Delta z . \quad (9.8)$$

On constate d'abord que deux événements simultanés dans O (*i.e.* $\Delta t = 0$) ne le sont plus dans O' , sauf si on les considère au même point (*i.e.* $\Delta x = 0$).

La mesure de la longueur d'un objet et la mesure du temps d'une horloge, tous deux placés dans O' , donnent des résultats plutôt surprenants. Pour éviter toute confusion dans le raisonnement, il convient de se mettre dans la situation illustrée par FIG. 9.2. L'observateur se trouve dans O et les grandeurs à mesurer dans O'



FIGURE 9.2 – Contraction des longueurs et dilatation du temps

1. La mesure, à partir de O , de la longueur d'un objet $\Delta x'$ placé dans O' se fait en déterminant la position des extrémités x_1 et x_2 de l'objet de manière simultanée *i.e.* dans un temps $\Delta t = 0$. Alors, à l'aide de (9.7), on obtient immédiatement la formule de la **contraction des longueurs**

$$\Delta x = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta x' . \quad (9.9)$$

Attention, l'objet défini dans O' ne devient pas plus court, il est mesuré plus court.

2. La mesure, à partir de O , du temps d'une horloge $\Delta t'$ placée dans O' se fait en considérant l'horloge au repos dans O' , *i.e.* pour $\Delta x' = 0$ et en la laissant fonctionner pendant $\Delta t'$ secondes. Les transformations (9.6) et (9.7) deviennent alors

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \beta\Delta x/c) \quad \Delta x = \beta c\Delta t ,$$

et l'élimination de Δx fournit la formule de **dilatation du temps**

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta t' . \quad (9.10)$$

On appelle **temps propre** τ le temps indiqué par l'horloge dans le référentiel où elle se trouve au repos. Dans le cas ci-dessus, le temps propre est $\Delta t'$ puisqu'on a exprimé le repos de l'horloge par $\Delta x' = 0$.

Une preuve éclatante de la dilatation du temps est donnée par la durée de vie moyenne des mésons μ . Leur temps propre $\Delta\tau = 2 \cdot 10^{-6}s$ est la durée de vie moyenne mesurée en laboratoire. Toutefois, pour des mésons μ provenant des rayons cosmiques, de vitesse $v \simeq c$ *i.e.* $\gamma \simeq 10$, on mesure, d'après la formule (9.10), le temps $\Delta t = 20 \cdot 10^{-6}s$. Le parcours possible des muons cosmiques est donc de $c\Delta t = 6 \text{ km}$. Un parcours de la durée du temps propre vaut seulement 600 m ! Dans ce cas les mésons μ ne pourraient pas atteindre la surface de la terre. Des mesures de dilatation du temps ont aussi été opérées sur des horloges gravitant autour de la terre. Il faut toutefois savoir que des modifications du temps sont aussi dues à la gravitation. Cet effet est prévu par la théorie de la relativité générale.

Une interprétation naïve de la relation (9.10) donne lieu au **paradoxe des jumeaux**¹ formulé par P. Langevin. En effet, les observateurs (jumeaux) situés en O et O' peuvent chacun prétendre être au repos ou en mouvement et donc voir leur âge relativement dilaté ou pas. Pour lever le paradoxe, on doit donner à O' une trajectoire spécifique, comme par exemple un trajet d'aller-retour ou une trajectoire circulaire² correspondant aux lignes d'univers de FIG. 9.3. Mais alors, on doit savoir que la dissymétrie entre O et O' introduit une accélération qui contredit la théorie de la relativité restreinte : O' n'est plus un référentiel d'inertie, les transformations de Lorentz ne sont plus valables globalement ! Dans le cas où O' décrit une trajectoire circulaire de rayon R , de vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$ constante

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (9.11)$$

on obtient la grandeur

$$dS^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 \left(1 - R^2 \omega^2 / c^2\right) dt^2 \quad (9.12)$$

qui possède la même forme qu'une vitesse rectiligne constante $v = \omega R$.

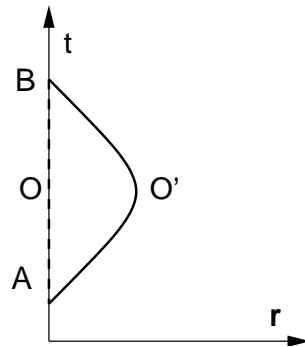


FIGURE 9.3 – Lignes d'univers des jumeaux O et O'

1. Au sujet du paradoxe des jumeaux, il faut prendre garde aux nombreuses interprétations erronées que l'on trouve dans la littérature.

2. N'importe quelle trajectoire curviligne pourrait être utilisée.

On peut donc restaurer localement les transformations de Lorentz en considérant des référentiels d'inertie instantanés³. Ces référentiels ont en chaque point de la trajectoire circulaire la vitesse $v = \omega R$ et satisfont la relation différentielle d'invariance fondamentale

$$dS'^2 = dS^2.$$

Alors, entre les événements A et B , le temps propre τ dans O' (temps pour $d\mathbf{r}' = 0$) est lié au temps dans O par la formule

$$\tau \equiv \int_A^B \frac{dS'}{c} = \int_A^B \frac{dS}{c} \quad (9.13)$$

et en introduisant la grandeur (9.12), on obtient⁴

$$\tau = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = \sqrt{1 - \beta^2} (t_B - t_A). \quad (9.14)$$

On retrouve la formule (9.10) de la dilatation du temps. Dans ce cas, le jumeau dans O' , de longévité $\tau < (t_B - t_A)$ ne peut plus prétendre être resté au repos puisque, durant son parcours, il a continuellement subi une accélération radiale $R\omega^2\mathbf{e}_r$ et donc ressenti une force centrifuge. Il doit admettre que son frère jumeau resté dans O a vécu un temps plus long que celui indiqué sur le chronomètre de O' .

9.2 Cinématique et dynamique relativiste

La différentielle $(dx^\mu) = (cdt, d\mathbf{r})$ est un quadrivecteur donné dans O , on peut donc déterminer (dx'^μ) dans O' par la transformation de Lorentz

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu. \quad (9.15)$$

Comment définir une vitesse relativiste sous la forme d'un quadrivecteur v^μ , *i.e.* sous la forme d'une grandeur transmissible de O à O' . Le temps t qui n'est pas le même dans O et O' ne peut manifestement plus être utilisé pour définir cette vitesse. Toutefois, le temps propre $d\tau$ peut être utilisé puisque c'est un invariant. En effet, l'expression (9.15) permet de définir l'invariant dS^2 qui dans le référentiel O' où la particule est au repos ($d\mathbf{r}' = 0$) devient

$$dS^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = (c^2 - v^2)dt^2 = dS'^2 = c^2 d\tau^2 \equiv c^2 d\tau^2. \quad (9.16)$$

On a défini le vecteur vitesse classique $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. La quantité $d\tau^2$ proportionnelle à dS^2 fournit le temps invariant

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt = \frac{1}{\gamma} dt \quad (9.17)$$

qui n'est rien d'autre que la formule de dilatation du temps (9.10). A l'aide de ce temps invariant, on peut définir le **quadrivecteur vitesse**

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (9.18)$$

3. La notion de référentiels instantanés est aussi utilisée dans le calcul du mouvement relativiste des particules dans les accélérateurs linéaires ou circulaires [voir (9.37)].

4. Dans le cas plus général où la vitesse v dépend du temps, l'intégration peut être plus difficile à effectuer mais ne change en rien l'argumentation.

qui avec la définition classique de la vitesse $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ prend la forme explicite

$$(v^\mu) = \gamma \frac{d}{dt}(ct, \mathbf{r}) = \gamma(c, \mathbf{v}) . \quad (9.19)$$

La vitesse v^μ est bien un quadrivecteur ($v^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu$) puisque x^μ est un quadrivecteur et $d\tau$ un invariant. Le produit du vecteur v^μ par lui-même est constant

$$v^\mu v_\mu = \frac{1}{1 - \beta^2} (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2 \quad (9.20)$$

et montre que v^μ est un quadrivecteur du genre temps ($v^\mu v_\mu > 0$). Par analogie avec la quantité de mouvement de la mécanique de Newton, on définit le quadrivecteur **énergie-impulsion**

$$(p^\mu) = (mv^\mu) = m\gamma(c, \mathbf{v}) . \quad (9.21)$$

De même, si l'on postule l'existence d'un quadrivecteur force F^μ , on peut, par analogie avec la mécanique de Newton, écrire les équations du mouvement

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu \quad (9.22)$$

appelées **équations d'Einstein** de la relativité restreinte. Toutefois, en dérivant (9.20) par rapport à τ , on voit que

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} v_\mu = 0 . \quad (9.23)$$

Ainsi, la force F^μ qui intervient dans l'équation (9.22) doit être telle que

$$F^\mu v_\mu = 0 . \quad (9.24)$$

La force de Lorentz F_L^μ est l'exemple type d'une telle force. Ce quadrivecteur force peut être déduit de manière naturelle à partir d'arguments de covariance. On sait que la force de Lorentz possède les caractéristiques suivantes :

- elle est proportionnelle à la charge q
- elle est linéaire en \mathbf{E} , \mathbf{B} et \mathbf{v} .

Le quadrivecteur le plus simple qui satisfait ces deux conditions est donné par le produit contracté du tenseur champ qui contient \mathbf{E} et \mathbf{B} avec le quadrivecteur vitesse

$$F_L^\mu = qF^{\mu\nu} v_\nu .$$

Avec (8.81), on obtient explicitement

$$(F_L^\mu) = q\gamma \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c} , \quad \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) . \quad (9.25)$$

Comme le tenseur champ $F^{\mu\nu}$ est antisymétrique, on en déduit la relation

$$F_L^\mu v_\mu = qF^{\mu\nu} v_\nu v_\mu = -qF^{\nu\mu} v_\nu v_\mu = 0$$

qui vérifie la condition d'orthogonalité (9.24).

En composantes, les équations d'Einstein (9.22) s'écrivent

$$\gamma \frac{d}{dt}(\gamma mc) = F^0 = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (9.26)$$

$$\gamma \frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = \mathbf{F} . \quad (9.27)$$

Ces quatre équations ne sont pas indépendantes. On vérifie (exercice) que la première dérive des trois dernières. L'équation (9.26) peut être interprétée comme le travail de la force \mathbf{F}/γ

$$d(\gamma mc^2) = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{\mathbf{F}}{\gamma} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.28)$$

et définit ainsi l'**énergie totale** d'un point matériel de masse m , libre

$$E = \gamma mc^2 . \quad (9.29)$$

Pour une masse m au repos, on trouve la relation d'**équivalence masse et énergie**

$$E^0 = mc^2 . \quad (9.30)$$

A partir de la définition de l'énergie-impulsion (9.21) et en définissant la **quantité de mouvement relativiste** $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, on peut écrire le quadrivecteur énergie-impulsion sous la forme

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) . \quad (9.31)$$

De l'expression (9.20) $p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$, on tire la relation importante entre l'énergie et l'impulsion

$$E^2 = (mc^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2 . \quad (9.32)$$

Comme le montre le carré de la vitesse (9.20), le quadrivecteur p^μ est du genre temps *i.e.* $\mathbf{p}^2 < E^2/c^2$. On peut donc trouver un référentiel O^0 dans lequel $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, à savoir

$$(p^{0\mu}) = \left(\frac{E^0}{c}, \mathbf{0} \right) . \quad (9.33)$$

Le référentiel O^0 possède la vitesse $v^0 = v$ par rapport à O puisque les transformations de Lorentz permettent d'écrire

$$p_x^0 = 0 = \gamma^0(p_x - \frac{\beta^0}{c} E) = \gamma^0(\gamma m v - v^0 \gamma m) . \quad (9.34)$$

C'est le référentiel propre de la particule de vitesse \mathbf{v} . De plus, la grandeur invariante $p^\mu p_\mu$ fournit l'expression

$$m^2 c^2 = p^\mu p_\mu = p^{0\mu} p_\mu^0 = \frac{E^{02}}{c^2}$$

qui redonne la relation d'équivalence entre la masse et l'énergie (9.30). Ce résultat peut aussi être obtenu par transformation de Lorentz, mais le calcul avec les invariants est plus élégant. Pour une particule de masse m , libre, on définit l'**énergie cinétique** T

$$E = mc^2 + T . \quad (9.35)$$

Alors, de la relation (9.32), on déduit l'expression

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{2mT + \frac{T^2}{c^2}} \quad (9.36)$$

qui à la limite non relativiste $\beta \ll 1$ *i.e.* pour $T \ll mc^2$ donne évidemment

$$T = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} .$$

Dans la théorie de la relativité restreinte, le vecteur \mathbf{v} représente la vitesse relative entre deux référentiels d'inertie O et O' et devrait par conséquent être constant. Mais, la dynamique que nous venons d'introduire sort de ce cadre puisqu'elle considère, comme le montrent les équations (9.26) et (9.27), une vitesse qui n'est plus constante. Ainsi, le référentiel de la particule en mouvement n'est plus lorentzien. Dans l'exemple qui suit, on va voir qu'il est malgré tout possible de définir une dynamique relativiste⁵ pour un point matériel d'accélération constante en considérant des référentiels d'inertie instantanés.

Exemple : Accélérateur linéaire

On considère une particule d'accélération uniforme g . Pour des vitesses v petites par rapport à c , on connaît la solution classique qui est donnée par le mouvement parabolique de la chute libre $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Dans le cas relativiste, on choisit pour O' le **référentiel instantané** de vitesse $v = g\delta t$ par rapport à O et dans lequel le quadrivecteur force vaut $(F'^\mu) = (0, mg, 0, 0)$. Dans ce référentiel O' , on a l'équation

$$\frac{d}{d\tau}p'^\mu = F'^\mu . \quad (9.37)$$

A l'aide d'une transformation de Lorentz, on passe dans le référentiel O (laboratoire) de vitesse instantanée $-\mathbf{v} \parallel O_x$. Il est possible de considérer ces référentiels instantanés puisque la force F'^μ est constante et que par conséquent le référentiel O' peut être choisi à n'importe quel moment sur la trajectoire. Alors la transformation

$$F = \Lambda^{-1}F' \quad (9.38)$$

de matrice Λ^{-1}

$$\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g = (\Lambda_\nu{}^\mu) = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (9.39)$$

fournit le quadrivecteur

$$(F^\mu) = mg\gamma(\beta, 1, 0, 0) \quad (9.40)$$

satisfaisant les relations

$$F^\mu v_\mu = 0 \quad F^\mu F_\mu = -m^2 g^2 . \quad (9.41)$$

5. Dans une dynamique relativiste, on souhaite pouvoir utiliser les relations qui existent entre les référentiels de Lorentz.

Les équations d'Einstein (9.27) deviennent

$$\frac{d}{dt}\gamma m\mathbf{v} = mg(1, 0, 0) \quad (9.42)$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$ et $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Une première intégration avec la condition initiale $\dot{x}(0) = 0$ donne

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} = gt. \quad (9.43)$$

En isolant \dot{x} , on obtient la vitesse

$$\dot{x}(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt/c)^2}}. \quad (9.44)$$

Dans la deuxième intégration, on pose $u = \sqrt{1 + (gt/c)^2}$ pour obtenir $\dot{x} = u c^2/g$. Alors avec la condition initiale $x(0) = 0$, on obtient le **mouvement hyperbolique**

$$x(t) = \frac{c^2}{g} \left[\sqrt{1 + (gt/c)^2} - 1 \right]. \quad (9.45)$$

On distingue les deux cas limites de grande et petite vitesse

$$\lim_{gt \gg 1} x(t) = ct \quad (9.46)$$

$$\lim_{gt \ll 1} x(t) = \frac{1}{2}gt^2. \quad (9.47)$$

En posant $\sinh w = gt/c$, le mouvement peut aussi s'écrire

$$x = \frac{c^2}{g}(\cosh w - 1). \quad (9.48)$$

Alors, pour une origine du temps fixée $\tau(0) = 0$, le calcul (exercice) du temps propre de la particule uniformément accélérée donne

$$\tau = \frac{c}{g}w. \quad (9.49)$$

D'où l'on tire finalement le quadrivecteur $(x^\mu) = (ct, x, 0, 0)$ donnant le mouvement d'une particule relativiste uniformément accélérée

$$(x^\mu(\tau)) = \frac{c^2}{g} \left(\sinh \frac{g\tau}{c}, \cosh \frac{g\tau}{c} - 1, 0, 0 \right). \quad (9.50)$$

9.3 Problème des deux corps en relativité

Le problème des deux corps de la mécanique de Newton peut être résolu exactement pour un potentiel d'interaction qui ne dépend que de $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Dans le cadre de la relativité restreinte, le problème des deux corps en interaction n'a pas de solution exacte. On prend conscience de cette difficulté lorsque l'on veut définir une impulsion totale $p^\mu(\tau_1) + p^\mu(\tau_2)$ qui n'est plus un quadrivecteur puisque les temps propres τ_1 et τ_2 sont différents.

Par contre, si les particules sont sans interaction *i.e.* ne sont soumises à aucune force, en raison des équations d'Einstein (9.22), les quadrivecteurs impulsion p_1^μ et p_2^μ sont constants dans le temps. Alors, une impulsion totale peut être définie et la conservation de l'énergie-impulsion avant et après l'interaction donne

$$p_1^\mu + p_2^\mu = \bar{p}_1^\mu + \bar{p}_2^\mu . \quad (9.51)$$

Le quadrivecteur **énergie-impulsion totale** est défini par

$$(P^\mu) = (p_1^\mu + p_2^\mu) = \left(\frac{E}{c} , \mathbf{P} \right) \quad (9.52)$$

où $E = E_1 + E_2$ et $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. Le quadrivecteur \mathbf{P} est du genre temps *i.e.* $P^\mu P_\mu > 0$. En effet, le calcul montre que

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu &= (p_1 + p_2)^\mu (p_1 + p_2)_\mu \\ &= \frac{1}{c^2} (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\ &= \frac{1}{c^2} (E_1^2 + E_2^2) - (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) + 2 \left(\frac{E_1 E_2}{c^2} - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \right) \\ &= (m_1^2 + m_2^2) c^2 + 2m_1 m_2 \gamma_1 \gamma_2 (c^2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) > 0 . \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\mathbf{P}^2 < E^2/c^2$, on peut trouver un référentiel O^{CM} dans lequel

$$\mathbf{P}_{CM} = \mathbf{p}_{1CM} + \mathbf{p}_{2CM} = \mathbf{0} . \quad (9.53)$$

On définit ainsi le référentiel du **centre de masse** O^{CM} par le quadrivecteur

$$(P_{CM}^\mu) = \left(\frac{E_{CM}}{c} , \mathbf{0} \right) \quad (9.54)$$

où E_{CM} est l'énergie totale dans le centre de masse. On a évidemment l'invariant

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{P}^2 = P^\mu P_\mu = P_{CM}^\mu P_{CM\mu} = \frac{E_{CM}^2}{c^2} . \quad (9.55)$$

Cette cinématique des deux corps est très utile en physique des particules élémentaires où l'on considère des particules libres, loin de la région d'interaction. Nous donnons ci-après quelques exemples typiques de tels systèmes.

Exemples : Utilisation du référentiel CM

a) **Energie du CM**

Une particule de masse m_1 et d'énergie E_1 entre en collision avec une particule de masse m_2 au repos dans le laboratoire. On montre (exercice) que la relation entre l'énergie dans le centre de masse et l'énergie de la particule incidente est donnée par

$$E_{CM}^2 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2 . \quad (9.56)$$

b) **Seuil de production des mésons π^0**

On considère la réaction $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$ entre protons p . On montre (exercice) que l'énergie cinétique minimale du proton incident, nécessaire à la production d'un méson π^0 , vaut

$$T = 2m_\pi c^2 \left[1 + \frac{m_\pi}{4M} \right] . \quad (9.57)$$

On utilise le fait que l'énergie minimale des trois particules dans le CM est donnée par $E_{CM} = 2Mc^2 + m_\pi c^2$.

c) **Processus de création de paires e^+e^-**

On considère la réaction $\gamma + p \rightarrow p + e^+ + e^-$ où γ représente un photon et p un proton de masse M . On montre (exercice) que l'énergie du seuil de production de paires est donnée par

$$E = 2mc^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) . \quad (9.58)$$

On utilise le fait que l'énergie du seuil de production dans le centre de masse vaut évidemment $E_{CM} = Mc^2 + 2mc^2$. L'énergie des photons incidents doit donc être légèrement supérieure ($m/M = 0.0005$) à deux fois la masse des électrons.

Chapitre 10

Appendices

10.1 Calcul variationnel

Le calcul variationnel est une généralisation du calcul différentiel dans des espaces fonctionnels. En mots simples, les variables sont des fonctions et les fonctions sont remplacées par des fonctionnelles. Une **fonctionnelle** I est définie par l'application qui à tout espace de fonctions fait correspondre un nombre

$$I : \{f, g, h, y, \dots\} \longrightarrow \mathbb{R} . \quad (10.1)$$

Par exemple, l'application

$$y \longmapsto I[y] = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (10.2)$$

fait correspondre à toute courbe $y(x)$ la distance qu'elle parcourt entre les points A et B dans le plan xy . Le problème que l'on peut poser est la détermination de la distance optimale entre deux points du plan *i.e.* de trouver la fonction $y(x)$ qui définit cette distance optimale. Comme on le fait pour les fonctions, nous devons déterminer la dérivée de I . Comment définir la différentielle ou la dérivée d'une fonctionnelle ?

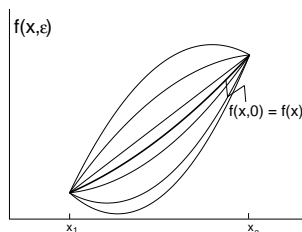


FIGURE 10.1 – Famille de paraboles $f(x, \epsilon)$

Dans le cadre de l'analyse dans des espaces de fonctions (espaces de Banach) cette dérivée est parfaitement définie comme dans \mathbb{R}^n et s'appelle dérivée de Fréchet. Dans

ce cas, on dit que la fonctionnelle $F[f]$ est dérivable s'il existe une fonctionnelle linéaire $\delta F[h]$, appelée variation telle que

$$F[f + h] - F[f] - \delta F[h] = o(h) \quad o(h)/\|h\| \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad \|h\| \rightarrow 0. \quad (10.3)$$

Pour ce qui concerne ce cours, nous allons simplifier l'approche en ramenant la variation à la différentielle d'une fonction par rapport à un paramètre. Pour cela, on remplace l'espace des fonctions par une **famille de fonctions** $f(x, \epsilon)$ $x \in [x_1, x_2]$ indicée par un paramètre $\epsilon \in \mathbb{R}$ et telles que $f(x, 0) = f(x)$. De plus, on choisit ces fonctions de telle manière que leurs valeurs soient égales aux extrémités de l'intervalle i.e. $f(x_1, \epsilon) = f(x_1)$ et $f(x_2, \epsilon) = f(x_2)$ pour tout ϵ . Un exemple simple d'une telle famille de fonctions est fourni par la famille de paraboles

$$f(x, \epsilon) = x^2 + \epsilon(x - x_1)(x - x_2) \quad (10.4)$$

illustrée sur FIG. 10.1. Pour $\epsilon \ll 1$, on peut considérer le développement de Taylor limité aux termes linéaires

$$f(x, \epsilon) = f(x) + \left. \frac{\partial f(x, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon + \dots \quad (10.5)$$

Alors, on peut définir la **variation** de f comme la différence¹

$$\delta f = f(x, \epsilon) - f(x) = \left. \frac{\partial f(x, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon \quad (10.6)$$

qui obéit évidemment aux conditions $\delta f(x_1) = 0 = \delta f(x_2)$. Comme le montre FIG. 10.2, une variation traduit un changement de fonction prise dans la famille et non pas le résultat d'un déplacement infinitésimal dans l'intervalle des x , qui est donné par la différentielle $df = f'(x)dx$.

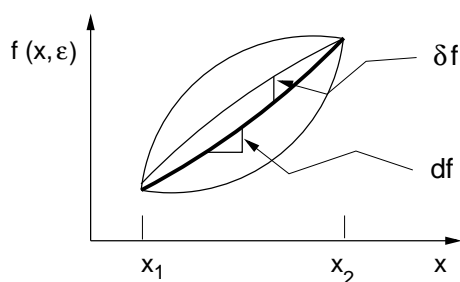


FIGURE 10.2 – Variation δf et différentielle df

On peut passer maintenant à une application importante du calcul des variations : la détermination du minimum de la fonctionnelle

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} g(y, y', x) dx \quad (10.7)$$

où $y' := dy/dx$. De la même manière que la minimalisation d'une fonction fournit le point correspondant au minimum de la fonction, la minimalisation d'une fonctionnelle fournit

1. Pour simplifier l'écriture, on laisse de côté la fonction $o(\epsilon)$ qui tend vers zéro avec ϵ .

la fonction correspondant au minimum de la fonctionnelle. Ce minimum est donné par la condition

$$\delta I = 0 \quad (10.8)$$

pour autant que la deuxième variation soit positive. Pour le calcul de δI , on considère la famille de fonctions $y(x, \epsilon)$ et l'on utilise la définition (10.5) pour obtenir

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} dx \delta g = \int_{t_1}^{t_2} dx \left. \frac{\partial g}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial g}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} \epsilon \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} \epsilon . \end{aligned}$$

où l'on a admis la commutativité des dérivées $\partial^2 y / (\partial x \partial \epsilon) = \partial^2 y / (\partial \epsilon \partial x) = \partial y' / \partial \epsilon$ et utilisé la règle de dérivation d'un produit. Avec la notation $\delta y = [\partial y / \partial \epsilon]_{\epsilon=0} \epsilon$, on a

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right) \right] \delta y + \left. \frac{\partial g}{\partial y'} \delta y \right|_{x_1}^{x_2} . \quad (10.9)$$

Le deuxième terme du membre de droite s'annule en raison des conditions aux extrémités $\delta y(x_1) = 0 = \delta y(x_2)$. La condition d'extremum $\delta I = 0$ et l'application du lemme fondamental du calcul des variations² nous permettent de déduire les **équations d'Euler-Lagrange**

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right) - \frac{\partial g}{\partial y} = 0 . \quad (10.10)$$

Réciproquement, on vérifie que les équations d'Euler-Lagrange impliquent $\delta I = 0$. Il suffit pour cela de remonter le calcul à partir de (10.10). La généralisation du calcul des variations à des fonction $y_j(x)$, $j = 1, n$ à plusieurs composantes est immédiate. On obtient les équations

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'_j} \right) - \frac{\partial g}{\partial y_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n . \quad (10.11)$$

La minimalisation donnée par les équations d'Euler peut s'appliquer à beaucoup de problèmes, comme par exemple :

- La détermination de la courbe d'un point A à un point B qui est parcourue dans le temps le plus court par un point matériel soumis à la gravitation (problème du brachistochrone). On définit la fonctionnelle temps

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad \text{où} \quad \frac{1}{2} m v^2 = m g y . \quad (10.12)$$

Cet exemple est à l'origine du calcul des variations (Johann Bernoulli 1696).

2. Lemme fondamental du calcul des variations :

Si les fonctions f et δy sont continues, on a

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta y(x) dx = 0 \quad \forall \delta y \quad \implies \quad f(x) = 0 \quad \forall x .$$

- La détermination du chemin que parcourt un rayon lumineux dans un temps minimal (principe de Fermat) dans un milieu d'indice de réfraction $n(\mathbf{r})$. On définit la fonctionnelle temps

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad \text{où} \quad v = \frac{c}{n}. \quad (10.13)$$

- La détermination de la surface minimale sous-tendue entre deux cercles de rayon a et b et situés en 0 et x_0 respectivement. On définit la fonctionnelle surface

$$S = 2\pi \int_0^{x_0} y(s) ds. \quad (10.14)$$

10.2 Distribution de Dirac

La distribution³ de Dirac répond, par exemple, à la question : comment définir la densité de masse ou de charge d'une particule ponctuelle ? Si l'on raisonne en termes de "fonction" de Dirac δ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r}) &= 0 \quad \mathbf{r} \neq 0, \\ \int_V \delta(\mathbf{r}) d^3r &= 1 \quad \text{pour tout volume } V \text{ qui contient le point } \mathbf{r} = 0. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Une telle définition correspond à un symbole de Kronecker continu et introduit une fonction δ qui n'existe pas ! On peut définir une distribution comme la classe des suites $f_n(x)$ qui satisfont la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) F(x) = F(0) \quad (10.16)$$

pour toute fonction continue $F(x)$, et on écrit symboliquement

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) F(x) = F(0). \quad (10.17)$$

Un exemple d'une telle suite est donnée par les fonctions

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n x^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

On remarque que la limite de cette suite n'existe que sous la forme d'une intégrale. On introduit aussi la dérivée $\delta'(x)$ à l'aide des manipulations formelles

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x) F(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) F'(x) = -F'(0) \quad (10.18)$$

pour toute fonction $F(x)$ continûment différentiable. L'approche rigoureuse définit $\delta'(x)$ comme la suite des dérivées des fonctions $f_n(x)$. Pour ces suites, on a par intégration par parties

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n'(x) F(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) F'(x).$$

3. Une distribution de Dirac δ_{x_0} est une fonctionnelle i.e une application d'un ensemble de fonctions dans \mathbb{R} et qui fait correspondre à toute fonction F sa valeur au point x_0 de la manière suivante

$$\delta_{x_0} : F \longmapsto \delta_{x_0}[F] = F(x_0).$$

Cette notation de fonctionnelle ne doit pas être confondue avec la notation $\delta(x - x_0)$ qui représente la "fonction" de Dirac.

Les dérivées d'ordre n peuvent aussi être définies de la même manière. La généralisation à l'espace \mathbb{R}^3 est évidente,

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z). \quad (10.19)$$

Mentionnons encore quelques relations utiles

$$\delta(x) = \delta(-x), \quad (10.20)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad (10.21)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (10.22)$$

où dans la dernière relation les x_i sont les zéros de $f(x)$.

10.3 Transformée de Fourier

Une fonction de carré intégrable dans l'intervalle $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ peut être représentée par une série de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\frac{2\pi}{a}nx} \quad (10.23)$$

avec

$$f_n = \int_{-a/2}^{a/2} dx e^{-i\frac{2\pi}{a}nx} f(x). \quad (10.24)$$

La convergence de la série de Fourier n'est pas nécessairement ponctuelle. Elle l'est en moyenne quadratique

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left| f(x) - \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\frac{2\pi}{a}nx} \right|^2 = 0. \quad (10.25)$$

L'équation (10.23) est un cas particulier du développement d'une fonction $f \in L^2 \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ par rapport à une base orthonormale. Ici la base est constituée des fonctions trigonométriques

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\frac{2\pi}{a}nx} \quad (10.26)$$

qui satisfont la propriété d'orthonormalité

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx e_m^*(x) e_n(x) = \delta_{m,n}. \quad (10.27)$$

En insérant (10.24) et (10.26) dans (10.23) nous trouvons l'expression

$$f(x') = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \sum_n e_n^*(x) e_n(x') f(x),$$

d'où l'on tire la **relation de fermeture**

$$\sum_n e_n^*(x) e_n(x') = \delta(x - x'). \quad (10.28)$$

Si l'on utilise (10.23) pour une valeur de x en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, on obtient une fonction périodique. Mais comment représenter une fonction de carré intégrable non

périodique sur tout l'axe réel? Formellement en faisant la limite $a \rightarrow \infty$. Dans cette limite les nombres

$$k_n = \frac{2\pi n}{a}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

deviennent continus et on a le théorème : Une fonction de carré intégrable dans l'intervalle $[-\infty, \infty]$ peut être représentée par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k), \quad (10.29)$$

où la fonction

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \quad (10.30)$$

appartient aussi à $L^2[-\infty, \infty]$. La fonction $\tilde{f}(k)$ s'appelle la **transformée de Fourier** de $f(x)$ qui elle-même est la transformée de Fourier de $\tilde{f}(k)$. La base dénombrable des fonctions $e_n(x)$ est alors remplacée par la base non-dénombrable des fonctions

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}. \quad (10.31)$$

La relation d'orthonormalité (10.27) devient

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_k^*(x) \varphi_{k'}(x) = \delta(k - k') \quad (10.32)$$

et la relation de fermeture (10.28) s'écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi_k^*(x) \varphi_k(x') = \delta(x - x'). \quad (10.33)$$

Cette dernière formule permet d'écrire l'expression courante

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} = \delta(x). \quad (10.34)$$

qui montre que la transformée de Fourier de la "fonction" de Dirac vaut 1. La généralisation à trois dimensions est évidente. Les équations (10.29) et (10.30) deviennent

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{f}(\mathbf{k}), \quad (10.35)$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(\mathbf{r}). \quad (10.36)$$

Les fonctions

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (10.37)$$

forment une base orthonormale,

$$\int d^3r \varphi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \varphi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (10.38)$$

et satisfont la relation de fermeture

$$\int d^3k \varphi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (10.39)$$

10.4 Intégration dans le plan complexe

La fonction de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ définie dans le paragraphe 4.4.4 nous amène à considérer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\lambda\omega} f(\omega) \quad (10.40)$$

où $f(\omega)$ possède un pôle simple en $\omega = \omega_0$. Cette intégrale n'est donc pas définie en ce point singulier. Il faudra utiliser des arguments physiques pour donner une interprétation correcte à (10.40). On peut éviter le pôle en considérant (10.40) comme une intégrale sur un chemin dans le plan complexe. Le pôle peut être contourné par la gauche ou par la droite selon FIG. 10.3.

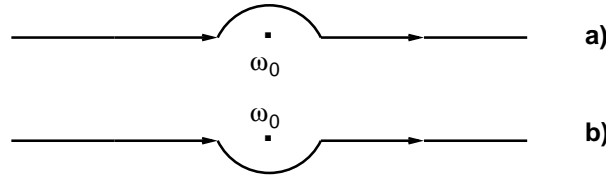


FIGURE 10.3 – Chemins d'intégration possibles

Afin de pouvoir utiliser les théorèmes de l'analyse complexe, nous devons fermer ces chemins. Dans les deux cas, on peut fermer le contournement choisi par une portion de chemin en demi-cercle dont la contribution est nulle à l'infini grâce au **lemme de Jordan** : Si $|f(\omega)| \rightarrow 0$ pour $|\omega| \rightarrow \infty$ on a

$$\int_{C_{\sim}} d\omega e^{i\lambda\omega} f(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{pour } \Omega \rightarrow \infty, \lambda > 0$$

$$\int_{C_{\smile}} d\omega e^{i\lambda\omega} f(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{pour } \Omega \rightarrow \infty, \lambda < 0$$

où Ω est le rayon des demi-cercles C_{\sim} et C_{\smile} qui sont tracés respectivement dans le plan complexe supérieur si $\lambda > 0$ et dans le plan complexe inférieur si $\lambda < 0$.

Alors, si l'on choisit de contourner le pôle par la gauche comme en a), le théorème des résidus donne

$$I = \begin{cases} 0 & \text{pour } \lambda > 0 \\ -2\pi i \operatorname{Res} \left\{ e^{i\lambda\omega_0} f(\omega_0) \right\} & \text{pour } \lambda < 0. \end{cases}$$

Par contre, si on choisit de contourner le pôle par la droite comme en b), le théorème des résidus donne

$$I = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ e^{i\lambda\omega_0} f(\omega_0) \right\} & \text{pour } \lambda > 0 \\ 0 & \text{pour } \lambda < 0. \end{cases}$$

Dans la formule (4.101) de la fonction de Green

$$G = -\frac{4\pi c^2}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \oint d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - k^2 c^2} = -\frac{4\pi c^2}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} I(k), \quad (10.41)$$

l'intégrant

$$f(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - k^2 c^2} = \frac{1}{2kc} \left(\frac{1}{\omega - kc} - \frac{1}{\omega + kc} \right) \quad (10.42)$$

a deux pôles en $\omega_0 = \pm kc$. Alors, avec $\lambda = t' - t$, on trouve pour le cas a)

$$I = \frac{2\pi}{kc} \theta(t - t') \sin [kc(t' - t)] , \quad (10.43)$$

où $\theta(t - t')$ est la fonction de Heaviside et pour le cas b)

$$I = \frac{2\pi}{kc} \theta(t' - t) \sin [kc(t - t')] . \quad (10.44)$$

Pour effectuer l'intégration sur d^3k dans (10.41), nous utilisons les coordonnées sphériques en plaçant naturellement l'axe d'intégration Ok_z parallèle à $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

$$\begin{aligned} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} I(k) &= 2\pi \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos \vartheta} I(k) \\ &= \frac{2\pi}{i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_0^\infty dk k I(k) \left\{ e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} . \end{aligned}$$

Avec l'expression (10.43) et en tenant compte du fait que l'intégrand pair permet d'étendre l'intégration sur tout l'intervalle $-\infty < k < +\infty$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} I(k) &= \frac{2\pi^2\theta(t-t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|c} \int_0^\infty dk \left[-e^{ik[c(t'-t)+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|]} - e^{-ik[c(t'-t)+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|]} \right. \\ &\quad \left. + e^{ik[c(t'-t)-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|]} + e^{-ik[c(t'-t)-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|]} \right] \\ &= \frac{2\pi^2\theta(t-t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du \left[-e^{iu[(t-t')-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c]} + e^{iu[(t-t')+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c]} \right] \\ &= -\frac{4\pi^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|c^2} \delta \left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} - (t-t') \right) , \quad (10.45) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété (10.34) de la distribution de Dirac en ne retenant que les arguments qui peuvent s'annuler pour $t - t' > 0$ comme l'exige la fonction $\theta(t - t')$. Le cas b) découle immédiatement. Il suffit de remplacer $t - t'$ par $t' - t$.