

Zusammenfassung des Seminarvortrags

Verallgemeinerte Messungen, POVM

Daniel R. Stephan

Betreuer: Fabian Mohn

Im Rahmen des Seminars
„Quanteninformationstheorie“
SS 2008, Universität Konstanz

1 Überblick

Projektionsmessungen, wie sie aus der grundlegenden Quantenmechanik bekannt sind, sind nicht die einzigen möglichen Quantenmessungen. Tatsächlich stoßen Projektionsmessungen bei einigen Anwendungen an ihre Grenzen, weil sie den gegebenen Quantenzustand stark verändern, indem sie ihn in einen Eigenzustand der zu den Projektoren gehörenden Observablen überführen. Verallgemeinerte Messungen können an die gegebene Aufgabenstellung angepasst werden; es kann kontrolliert werden, wie stark die Messung den Zustand beeinflusst. Projektionsmessungen sind ein Grenzfall verallgemeinerter Messungen, genau wie maximal unscharfe Messungen, bei denen der Zustand gar nicht verändert wird, man allerdings auch keine Erkenntnisse über das System gewinnt. POVM ist eine abstraktere Form der Mes-

sung und beinhaltet verallgemeinerte und somit auch Projektionsmessungen. POVM ist bei Fragestellungen nützlich, bei denen man sich nicht mit der konkreten Realisierung der Messung beschäftigen möchte, sondern nur mit den möglichen Messergebnissen und deren Wahrscheinlichkeiten.

2 Motivation

Betrachten wir beispielsweise Rabi-Oszillationen: Wenn man ein zwei-Niveau-System von außen mit einer periodischen Kraft (z.B. mit elektromagnetischer Strahlung) anregt, so erhält man eine zeitabhängige Superposition aus beiden Zuständen:

$$|\psi(t)\rangle = c_0(t)|0\rangle + c_1(t)|1\rangle \quad . \quad (1)$$

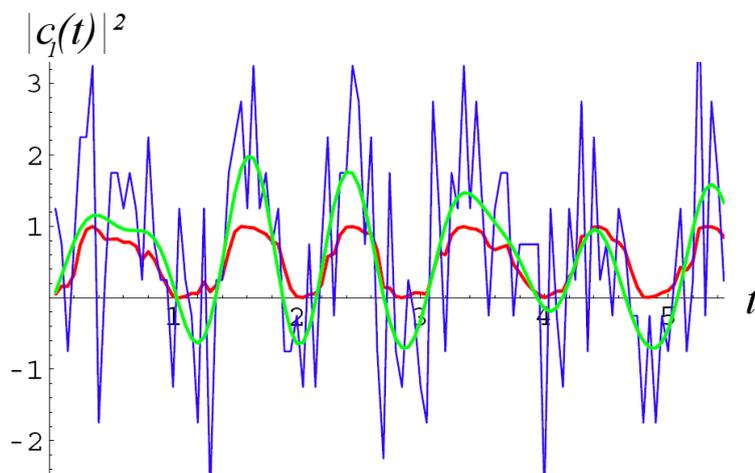


Abbildung 1: Computersimulation einer Messung von Rabi-Oszillationen. Blau: Messung von $|c_1(t)|^2$, grün: entrauschte Messung, rot: tatsächliche Zustandsentwicklung von $|c_1(t)|^2$ (unter Berücksichtigung des Einflusses der Messung). Aus [2].

Wenn man mittels Projektionsmessungen den zeitlichen Verlauf von $c_0(t)$ bzw.¹ $c_1(t)$ beobachten möchte, so ist das nicht möglich, da eine Projektionsmessung dazu führt, dass sich das System in einen Eigenzustand der betreffenden Observablen überführt wird:

$$|\psi\rangle \rightarrow |0\rangle \quad \text{oder} \quad |\psi\rangle \rightarrow |1\rangle \quad . \quad (2)$$

Verallgemeinerte Messungen hingegen gestatten einen Einblick in die Dynamik dieses und anderer Systeme, da hier die Auswirkung auf den Zustand im allgemeinen weniger stark ist als bei Projektionsmessungen. Ein Beispiel für eine solche Messung (als Computersimulation) ist Abbil-

dung 1. Hierbei ist der Einfluss der Messung auf den Zustand schon berücksichtigt; die ungemessene Zustandsentwicklung wäre $\sim \sin^2 t$. Wie man sieht entspricht der Zustand relativ gut dem ungemessenen Fall, wenngleich er durch die Messung leicht verändert wird. Die grüne Kurve gibt ebenfalls relativ gut aber nicht perfekt die Zustandsentwicklung wieder.

3 Verallgemeinerte Messungen

3.1 Das ideale Stern-Gerlach-Experiment

Abbildung 2 zeigt den prinzipiellen Aufbau des Stern-Gerlach-Experiments. Der Ofen sendet einen Strahl aus Silberatomen aus,

¹Über die Normiertheit des Zustands hängen beide zusammen; wenn eines bekannt ist, kann das andere errechnet werden

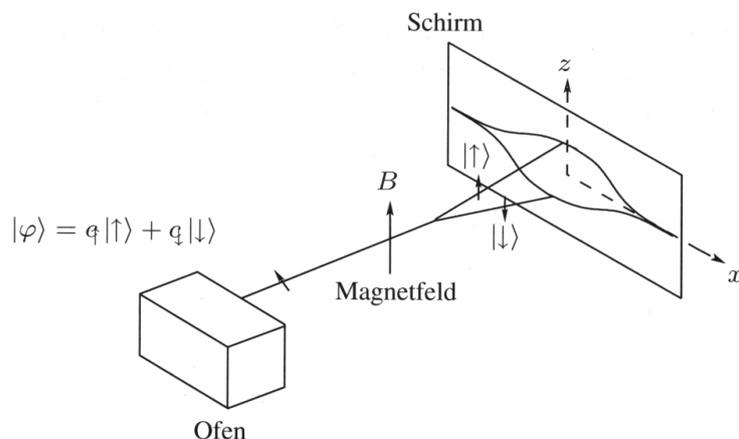


Abbildung 2: Aufbau des Stern-Gerlach-Experiments. Aus [1]

der dann durch das inhomogene Magnetfeld läuft. Silber besitzt ein Elektron in der 4s-Schale und ansonsten nur volle (und leere) Schalen. Da weder volle noch leere Schalen ein resultierendes Bahn- oder Spinmoment aufweisen und s-Elektronen keinen Drehimpuls besitzen, wechselwirkt lediglich das Spinmoment des 4s-Elektrons mit dem inhomogenen Magnetfeld. Dadurch werden die Silberatome je nach Elektronenspinmoment nach oben oder unten abgelenkt. Das Magnetfeld ist hier so gewählt, dass Spin-up-Atome (Zustand $|\uparrow\rangle$) nach oben und Spin-down-Atome (Zustand $|\downarrow\rangle$) nach unten abgelenkt werden. Die abgelenkten Atome werden im traditionellen Stern-Gerlach-Experiment nachgewiesen, indem man eine Glasplatte als Schirm hinter das Magnetfeld stellt. Bei unseren Überlegungen ist es sinnvoller, zwei zerstörungsfreie Detektoren zu verwenden, damit sich die Silberatome nach der Messung in einem sinnvollen Quantenzustand befinden (und nicht an einer Glasp-

latte kleben). Wir wollen dieses Experiment mit Spinraum \mathcal{H}_2^S mit der Orthonormalbasis (ONB) $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ und mit dem Bahnraum \mathcal{H}_2^B mit ONB $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ beschreiben. Die Zustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ im Bahnraum beschreiben den Fall, dass ein Atom nach oben (bzw. unten) abgelenkt und mit dem entsprechenden Detektor nachgewiesen wird. Aufgrund der Beschaffenheit des Magnetfelds liegen folgende Korrelationen vor: $|\uparrow\rangle \hat{=} |+\rangle$ und $|\downarrow\rangle \hat{=} |-\rangle$.

Vor der Messung durch die beiden Detektoren liegt im Spinraum folgender Superpositionszustand vor:

$$|\phi\rangle = c_\uparrow |\uparrow\rangle + c_\downarrow |\downarrow\rangle \in \mathcal{H}_2^S \quad . \quad (3)$$

Durch das Magnetfeld werden Spin- und Bahnzustände verschränkt; dies wird durch eine unitäre Transformation beschrieben:

$$|\chi\rangle \xrightarrow{\text{unitär}} |\chi'\rangle = c_\uparrow |\uparrow\rangle |+\rangle + c_\downarrow |\downarrow\rangle |-\rangle \quad (4) \\ \in \mathcal{H}_2^S \otimes \mathcal{H}_2^B \quad .$$

Dies ist also der Zustand nach dem Magnetfeld und vor den Detektoren. Es handelt sich um den Gesamtzustand aus beiden Hilberträumen, also um einen Zustand aus dem Produktraum $\mathcal{H}_2^S \otimes \mathcal{H}_2^B$. Man beachte die Korrelation zwischen $|\uparrow\rangle$ und $|+\rangle$ bzw. $|\downarrow\rangle$ und $|-\rangle$. Falls der obere Detektor auf diesen Zustand anspricht, wird:

$$|\phi\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle \quad . \quad (5)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist:

$$p_+ = |c_+|^2 = \langle \phi | P_+ | \phi \rangle \quad (6)$$

$$\text{mit } P_+ \equiv |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \quad . \quad (7)$$

P_+ ist der Projektionsoperator zum Zustand $|\uparrow\rangle$. Analoge Überlegungen gelten natürlich für den Fall, dass der untere Detektor anspricht. Wir haben mit den beiden Detektoren im Bahnraum \mathcal{H}_2^B projektiv gemessen. Wie man leicht anhand der Gleichungen (5)–(7) erkennt, hat das auf eine Projektionmessung im Spinraum \mathcal{H}_2^S geführt!

3.2 Das nicht-ideale Stern-Gerlach-Experiment

Falls die räumliche Trennung durch das Magnetfeld nicht ideal ausfällt, spricht der (+)-Detektor mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p_0 auch auf $|\downarrow\rangle$ -Zustände an und der (-)-Detektor ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit p_0 auf $|\downarrow\rangle$ -Zustände (d.h. die Atome können sozusagen in den falschen Detektor gelangen). Für den Fall, dass der (+)-Detektor anspricht, liegt also immernoch eine Superposition vor:

$$|\chi\rangle \rightarrow \left[\sqrt{1-p_0}c_+|\uparrow\rangle + \sqrt{p_0}c_+|\downarrow\rangle \right] \cdot |+\rangle \quad (8)$$

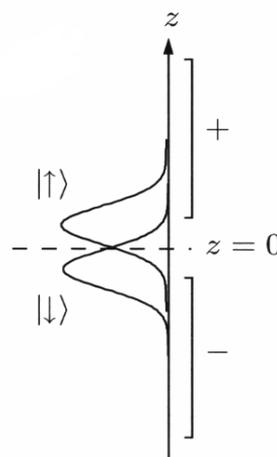


Abbildung 3: Ansprechverhalten der beiden Detektoren im nicht-idealen Fall. Aus [1]

Analoges gilt für den Fall, dass der andere Detektor anspricht. Daher muss der Gesamtzustand vor der Messung folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned} |\chi'\rangle = & \left[\sqrt{1-p_0}c_+|\uparrow\rangle + \sqrt{p_0}c_+|\downarrow\rangle \right] \cdot |+\rangle \\ & + \left[\sqrt{p_0}c_+|\uparrow\rangle + \sqrt{1-p_0}c_+|\downarrow\rangle \right] \cdot |-\rangle \quad (9) \end{aligned}$$

Eine verallgemeinerte Messung wird nun durch sogenannte *Messoperatoren* beschrieben. In diesem Fall gibt es einen für das Messergebnis „+“ und eine für „-“:

$$M_+ \equiv \sqrt{1-p_0}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sqrt{p_0}|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (10)$$

$$M_- \equiv \sqrt{p_0}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sqrt{1-p_0}|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (11)$$

Diese Messoperatoren werden auch *Krauss-Operatoren* genannt. Sie erfüllen die Vollständigkeitsrelation:

$$M_+^\dagger M_+ + M_-^\dagger M_- = \mathbb{1} \quad . \quad (12)$$

Die Messoperatoren sind so definiert, dass man mit ihnen auf elegante Weise die Messung im Spinsystem \mathcal{H}_2^S beschreiben kann: Für den Fall, dass der Detektor (+) anspricht, gilt für die Zustandsänderung und die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall:

$$|\phi\rangle \rightarrow |\phi_+\rangle = \left[\sqrt{1-p_0}c_\uparrow|\uparrow\rangle + \sqrt{p_0}c_\downarrow|\downarrow\rangle \right] \cdot \text{Norm}^{-1} \quad (13)$$

$$= M_+|\phi\rangle \cdot \text{Norm}^{-1} \quad (14)$$

$$p_+ = (1-p_0)|c_\uparrow|^2 + p_0|c_\downarrow|^2 \quad (15)$$

$$= \langle \phi | M_+^\dagger M_+ | \phi \rangle \quad (16)$$

Analoges gilt wieder für den (-)-Detektor. Betrachten wir zwei Extremfälle: wenn $p_0 = 0$ ist, liegt wieder der ideale Fall vor. Der Gesamtzustand (9) wird dann zum Gesamtzustand beim idealen Experiment (4), die Messwahrscheinlichkeit (15) vereinfacht sich zu (6) und die Messoperatoren (10) und (11) werden zu Projektoren. Es liegt also wieder eine projektive Messung am Spinraum vor. Der andere Extremfall ist $p_0 = \frac{1}{2}$: Hier verändert sich der Zustand im Spinraum durch die Messung nicht (vgl. Gleichung (9)), die Messoperatoren werden identisch und die Messwahrscheinlichkeiten sind folglich nicht mehr mit dem Zustand im Spinraum verknüpft. Der Gesamtzustand vor der Messung ist ein Produktzustand und somit nicht mehr verschränkt. Diesen Fall nennt man *maximal unscharfe Messung*. In beiden Extremfällen wurde *projektiv* in \mathcal{H}_2^B gemessen, dennoch sind die Auswirkungen auf das System \mathcal{H}_2^S völlig unterschiedlich!

3.3 Verallgemeinerte Messpostulate

- Jede verallgemeinerte Messung wird durch *lineare Messoperatoren* (sog.

Krauss-Operatoren) beschrieben. Zu jedem möglichen *Messwert* m existiert genau ein *Messoperator* M_m . Bei der Messung gilt für den Zustand im zu messenden System (vorhin: Spinsystem \mathcal{H}_2^S):

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'_m\rangle = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}} \quad (17)$$

- Die Wahrscheinlichkeit für das Messergebnis m und somit für den Endzustand $|\psi_m\rangle$ ist

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (18)$$

- Die Messoperatoren M_m müssen die *Vollständigkeitsrelation* erfüllen, damit die Messung physikalisch sinnvoll ist, insbesondere damit die Wahrscheinlichkeit, überhaupt einen Messwert bei der Messung zu erhalten, eins ergibt.

$$\sum_m p(m) \stackrel{\text{Forderung 1}}{=} 1 \quad (19)$$

$$\Rightarrow \sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{1} \quad (20)$$

Merke: Die Messoperatoren M_m müssen keine hermiteschen Operatoren sein! Ihre Anzahl kann die Dimension des betrachteten Hilbert-Raums übersteigen. M_m sind im Allgemeinen *keine Observablenoperatoren*! Eine wichtige Ausnahme sind projektive Messung, wo die Messoperatoren wie eben gesehen zu Projektoren werden und somit Observablen zugeordnet sind. Man kann diese Postulate auch auf Dichteoperatoren verallgemeinern:

$$\rho \rightarrow \rho'_m = M_m \rho M_m^\dagger \quad (21)$$

$$p(m) = \text{tr}[M_m^\dagger M_m \rho] = \text{tr}[\rho_m] \quad (22)$$

Projektionsmessung (scharfe Messung)	verallgemeinerte Messung (schwache Messung)
Observable $A = \sum_m m \psi_m\rangle\langle\psi_m $	keine Observable A (i.A.)
Projektoren $P_m = \psi_m\rangle\langle\psi_m $	Messoperatoren M_m
$p(m) = \langle\psi_m \psi\rangle ^2$ $= \langle\psi P_m \psi\rangle$	$p(m) = \langle\psi M_m^\dagger M_m \psi\rangle$

Tabelle 1: Vergleich zwischen verallgemeinerten und Projektionsmessungen.

Und für nicht-selektive Messungen:

$$\rho \rightarrow \rho' = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger \quad (23)$$

In Tabelle 1 sind die wichtigsten Unterschiede zwischen verallgemeinerten und Projektionsmessungen dargestellt.

3.4 Minimale Messungen

Man kann beweisen, dass für jeden linearen Operator (also auch für jeden Messoperator) folgende polare Zerlegung existiert:

$$M_m = U_m \sqrt{E_m} \quad \text{mit} \quad E_m \equiv M_m^\dagger M_m. \quad (24)$$

Die U_m sind unitäre Operatoren, die E_m sind linear und positiv und heißen *Effektoperatoren*. Letztere erfüllen

$$\sum_m E_m = \mathbb{1} \quad (25)$$

und bilden somit ein sog. POVM. Aus (24) folgt, wenn man beide Seiten auf einen Zustand anwendet:

$$M_m |\psi\rangle = U_m \sqrt{E_m} |\psi\rangle \quad (26)$$

Da unitäre Operatoren spurerhaltend sind, ist für Wahrscheinlichkeit des Messwerts m nur E_m von Bedeutung:

$$p(m) = \text{tr}[M_m^\dagger M_m \rho] = \text{tr}[E_m \rho] \quad (27)$$

U_m beeinflusst nur den Zustand $|\psi_m\rangle$ nach der Messung. Dieser Einfluss verschwindet, wenn $U_m = \mathbb{1}$ wird. Diesen Fall nennt man *minimale Messung*, da der Einfluss der Messung auf den Zustand minimal wird. Er verschwindet nicht komplett, da $\sqrt{E_m}$ ebenfalls den Zustand beeinflusst und auch im Fall einer minimalen Messung i.A. nicht zur Identität $\mathbb{1}$ wird.

3.5 Realisierung einer verallgemeinerten Messung durch unitäre Transformation und Projektion

Behauptung: Jede verallgemeinerte Messung an einem System \mathcal{H}^A kann realisiert werden, indem man auf $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ eine unitäre Transformation durchführt und an \mathcal{H}^B projektiv misst. \mathcal{H}^B ist ein Hilffsystem.

Dass diese Vorgehensweise möglich ist, haben wir bereits beim nicht-idealen Stern-Gerlach-Experiment gesehen. \mathcal{H}^A war dort

der Spinraum, \mathcal{H}^B war der Bahnraum. Um die Behauptung zu belegen definieren wir den linearen Operator \hat{U}^{AB} auf einem Unterraum $\mathcal{H}^C \subset \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ mittels

$$\hat{U}^{AB}|\phi^A, 0^B\rangle = \sum_m M_m^A |\phi^A\rangle \otimes |m^B\rangle. \quad (28)$$

$\{|m^B\rangle\}$ ist eine Orthonormalenbasis in \mathcal{H}^B , $|0^B\rangle$ ein beliebiger, fester Zustand in \mathcal{H}^B . Man kann beweisen, dass eine *unitäre Erweiterung* U^{AB} von \hat{U}^{AB} existiert, die auf ganz $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ definiert ist. Das bedeutet, dass U^{AB} physikalisch sinnvoll ist (also mit einem Hamilton-Operator als unitäre zeitliche Entwicklung realisiert werden kann). U^{AB} wirkt auf \mathcal{H}^C genauso wie \hat{U}^{AB} . Wir schauen uns nun an, was passiert, wenn wir eine projektive Messung in \mathcal{H}^B mit dem zugehörigen Projektionsoperator

$$P_m^B \equiv \mathbb{1}^A \otimes |m^B\rangle\langle m^B| \quad (29)$$

durchführen. Dieser ist zwar auf dem Produktraum definiert, wirkt aber nur im Hilbertraum \mathcal{H}^B nicht-trivial. Der Zustand nach dieser Messung ist

$$\begin{aligned} & P_m^B U^{AB} |\phi^A, 0^B\rangle \cdot \frac{1}{\text{Norm}} \\ &= \frac{M_m^A |\phi^A\rangle |m^B\rangle}{\sqrt{\langle \phi^A | M_m^{A\dagger} M_m^A | \phi^A \rangle}} \end{aligned} \quad (30)$$

Die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist:

$$p(m) = \langle \phi^A | M_m^{A\dagger} M_m^A | \phi^A \rangle \quad (31)$$

Wenn man Gleichung (30) mit dem Postulat der Zustandsentwicklung bei der verallgemeinerten Messung (17) vergleicht, stellt man fest, dass sie identisch sind. Gleiches findet man für (31) und dem Postulat für die Messwahrscheinlichkeit (18) Das

bedeutet, dass das beschriebene Verfahren auf eine verallgemeinerte Messung geführt hat. Da wir keinerlei Anforderungen an die Messoperatoren gestellt haben, ist gezeigt, dass man jede verallgemeinerte Messung auf diese Weise realisieren kann.

4 POVM

4.1 Grundlegendes

Definition: POVM steht für *positiv-operatorwertiges Maß* (Positive Operator Valued Measure). Eine Familie $\{E_m\}_m$ aus *linearen, positiven Operatoren* heißt POVM genau dann, wenn

$$\sum_m E_m = \mathbb{1} \quad . \quad (32)$$

Es handelt sich also um eine Zerlegung der Identität $\mathbb{1}$. Den Operatoren E_m sind Messwerte m zugeordnet. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Messwerte sind:

$$p(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle \quad (33)$$

$$\text{bzw.:} \quad p(m) = \text{tr}[\rho E_m] \quad (34)$$

$$\text{somit:} \quad \sum_m p(m) = 1 \quad . \quad (35)$$

Man spricht dann von einer *POVM-Messung*. Anhand der Gleichung

$$E_m = M_m^\dagger M_m \quad (36)$$

erkennt man, dass jede verallgemeinerte Messung eine POVM ist, d.h. dass jede verallgemeinerte Messung die obige Definition erfüllt. Da jede Projektionsmessung eine verallgemeinerte Messung ist, sind Projektionsmessungen ebenfalls ein Spezialfall von

POVM-Messungen. Für die Effektoroperatoren gilt dann:

$$E_m = P_m \quad . \quad (37)$$

In diesem Fall nennt man die E_m ein *projektionswertiges Maß (PVM)*. POVM-Messungen sind abstrakter als verallgemeinerte Messung, da man sich nur mit den möglichen Messwerten und deren Wahrscheinlichkeiten auseinandersetzt. Es ist im Gegensatz zu verallgemeinerten Messungen nicht notwendig, Messoperatoren M_m anzugeben. Falls man jedoch z.B. zur experimentellen Realisierung zu einem POVM entsprechende Messoperatoren benötigt, kann man diese folgendermaßen wählen:

$$M_m = \sqrt{E_m} \quad . \quad (38)$$

4.2 Sichere Unterscheidbarkeit zweier Zustände mittels POVM

Bei Projektionsmessungen ist (z.B. aus dem integrierten Kurs) bekannt, dass man damit zwei nicht-orthogonale Zustände nicht sicher voneinander unterscheiden kann. Es stellt sich die Frage, ob es sich bei POVM genauso verhält oder ob die Unterscheidbarkeit hier doch gegeben ist (das wäre unvorteilhaft für Quantenverschlüsselungsalgorithmen). Um diese Frage zu klären, versuchen wir herauszufinden, ob sich das gegebene Quantensystem im Zustand $|\chi\rangle$ befindet. Dazu benutzen wir ein POVM $\{E_m\}_m$. Wir definieren das Messergebnis m_0 folgendermaßen: m_0 tritt *genau dann* ein, wenn das System im Zustand $|\chi\rangle$ ist. Daher muss für den zugehörigen Effektoroper

rator E_{m_0} folgendes gelten:

$$p_\chi(m_0) = \langle \chi | E_{m_0} | \chi \rangle \stackrel{!}{=} 1 \quad (39)$$

$$\forall |\theta\rangle \neq |\chi\rangle : p_\theta(m_0) = \langle \theta | E_{m_0} | \theta \rangle \stackrel{!}{=} 0 \quad . \quad (40)$$

Wir beweisen, dass für beliebige E aus einem POVM folgende Lemmata gelten:

$$\langle \phi | E | \phi \rangle = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E | \phi \rangle = | \phi \rangle \quad (41)$$

$$\langle \phi | E | \phi \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E | \phi \rangle = 0 \quad . \quad (42)$$

Beweis: Die Folgerungen von der rechten zu linken Seite sind trivial.

$$„\langle \phi | E | \phi \rangle = 1 \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad E | \phi \rangle = | \phi \rangle$$

Betrachte die Spektraldarstellung von E :

$$E = \sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j| \quad . \quad (43)$$

Da E positiv und Teil eines POVM ist, muss für die Eigenwerte λ_j gelten:

$$0 \leq \lambda_j \leq 1 \quad . \quad (44)$$

Wende E auf einen Zustand $|\phi\rangle$ an und führe Abkürzungen c_j ein:

$$E | \phi \rangle = \sum_j \lambda_j c_j |j\rangle \quad (45)$$

$$c_j \equiv \langle j | \phi \rangle \quad . \quad (46)$$

Bilde nun den Erwartungswert

$$\langle \phi | E | \phi \rangle = \sum_j \lambda_j |c_j|^2 \quad . \quad (47)$$

Es ist

$$\sum_j |c_j|^2 = \sum_j \langle \phi | \underbrace{|j\rangle \langle j|}_1 | \phi \rangle = 1 \quad . \quad (48)$$

Betrachte nun ein spezielles $|\tilde{\phi}\rangle$ mit der Eigenschaft

$$\langle \tilde{\phi} | E | \tilde{\phi} \rangle = \sum_j \lambda_j |c_j|^2 \stackrel{!}{=} 1 \quad . \quad (49)$$

Daraus folgt

$$\forall j : \quad \lambda_j = 1 \quad . \quad (50)$$

Obige Folgerung gilt nicht für diejenigen j , für die $|c_j|^2 = 0$ ist. Das ist jedoch nicht von Bedeutung, da der entsprechende Summand in (49) dann ohnehin verschwindet. Man kann also vereinbaren, dass auch diese λ_j eins sind, ohne den Wahrheitsgehalt von (49) zu verändern. Wende nun E auf $|\tilde{\phi}\rangle$ an:

$$E|\tilde{\phi}\rangle = \sum_j \underbrace{\lambda_j}_1 \underbrace{|j\rangle\langle j|}_{\mathbb{1}} \tilde{\phi} = |\tilde{\phi}\rangle \quad . \quad (51)$$

Man erkennt auch hier, dass aufgrund von $\langle j | \tilde{\phi} \rangle = c_j$ diejenigen λ_j , bei denen $|c_j|^2 = 0$ ist und die daher nicht zwingend eins sein müssen, ohne Bedeutung sind. Damit ist das erste Lemma (41) bewiesen. Betrachten wir nun:

$$\text{„}\langle \phi | E | \phi \rangle = 1 \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad E|\phi\rangle = |\phi\rangle\text{“} \quad .$$

Für ein spezielles $|\hat{\phi}\rangle$ soll gelten:

$$\langle \hat{\phi} | E | \hat{\phi} \rangle = \sum_j \lambda_j |c_j|^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad . \quad (52)$$

Daraus folgt:

$$\forall j : \quad \lambda_j = 0 \quad . \quad (53)$$

Das gilt wieder nur für λ_j , für die c_j nicht verschwindet. Wir erhalten:

$$E|\hat{\phi}\rangle = \sum_j \underbrace{\lambda_j}_0 \underbrace{|j\rangle\langle j|}_{\mathbb{1}} \hat{\phi} = 0 \quad . \quad (54)$$

Damit ist auch das zweite Lemma (42) bewiesen.

Offensichtlich trifft das Lemma (41) auf den Fall (39) zu und Lemma (42) auf Fall (40) zu. Wir berechnen das Skalarprodukt des betrachteten Zustands $|\chi\rangle$ mit einem beliebigen anderen Zustand $|\theta\rangle$; dabei verwenden wir beim ersten Gleichheitszeichen Lemma (41) und beim zweiten Lemma (42):

$$\langle \chi | \theta \rangle = \langle \chi | E_{m_0} | \theta \rangle = 0 \quad . \quad (55)$$

Man beachte beim ersten Gleichheitszeichen, dass E_{m_0} selbstadjungiert ist. Das Verschwinden des Skalarprodukts bedeutet, dass alle übrigen Vektoren des Hilbertraums senkrecht zu $|\chi\rangle$ stehen müssen; das verstößt gegen die Vektorraumaxiome! Daher ist es auch mit POVM nicht möglich, sicher zwischen zwei nicht-orthogonalen Zuständen zu unterscheiden; die bekannte Tatsache für Projektionsmessungen ist somit auf POVM verallgemeinert.

4.3 Anwendungsbeispiel: (unsichere) Unterscheidung zweier Zustände

Im letzten Abschnitt wurden die Grenzen von POVM aufgezeigt; in diesem Abschnitt soll eine Anwendung vorgestellt werden, die deutlich macht, dass POVM durchaus nützlich sein kann und Projektionsmessungen in manchen Fällen überlegen ist. Wir betrachten einen Apparat, der mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein Quantenobjekt in einen der beiden bekannten (i.A. nicht-orthogonalen) Quantenzustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ präpariert. Man kann sich hier z.B. eine Einzel-Photonen-Lichtquelle mit zwei möglichen Polarisationsrichtungen vorstellen. Es soll gemessen werden, in welchem

Zustand sich das Quantensystem befindet. Dazu definieren wir uns drei Effektoratoren zu drei möglichen Messergebnissen:

- E_1 zu Messwert m_1 : System sicher in $|1\rangle$ (also sicher *nicht* in $|2\rangle$)
- E_2 zu Messwert m_2 : System sicher in $|2\rangle$ (also sicher *nicht* in $|1\rangle$)
- E_3 zu Messwert m_3 : „keine Ahnung“, keine Aussage möglich

Die Überlegung, dass sich im Fall $m = 1$ das System auf keinen Fall in $|2\rangle$ befinden darf und umgekehrt, führt auf die Effektoratoren

$$\begin{aligned} E_1 &= a_2(\mathbb{1} - |2\rangle\langle 2|) \\ &\Rightarrow p_{|2\rangle}(1) = \langle 2|E_1|2\rangle = 0 \\ E_2 &= a_1(\mathbb{1} - |1\rangle\langle 1|) \\ &\Rightarrow p_{|1\rangle}(2) = \langle 1|E_2|1\rangle = 0 \\ E_3 &= \mathbb{1} - E_1 - E_2 \quad . \end{aligned}$$

Die Definition von E_3 stellt sicher, dass es sich um ein POVM handelt, d.h. dass die Summe der Operatoren die Identität ergibt. Damit in möglichst wenigen Fällen das Ergebnis „keine Ahnung“ auftritt, versucht man $p(3) = \langle \psi|E_3|\psi\rangle$ zu minimieren. Dies geschieht mittels der Parameter a_1, a_2 . Wenn man optimale $a_{1,2}$ verwendet, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, einen sicheren Schluss zu ziehen, zu [3]:

$$1 - p(3) = 1 - |\langle 1|2\rangle| \quad . \quad (56)$$

Im Gegensatz zu Projektionsmessungen sind *sichere Schlüsse möglich*. Das verstößt *nicht* gegen den Beweis von vorhin, da man hier das Ergebnis „keine Ahnung“ erhalten kann! Sichere Schlüsse sind also möglich, aber es ist nicht garantiert, dass man tatsächlich einen sicheren Schluss erhält.

5 Zusammenfassung

Am Beispiel der Rabi-Oszillationen wurde gezeigt, dass man mit verallgemeinerten Messungen die Dynamik eines Quantensystems verfolgen kann, ohne es zu stark zu stören. Dafür erhält man jedoch weniger Information aus der Messung. Man kann zwischen Beeinflussung des Zustands und Informationsgehalt der Messung abwägen. (Beim nicht-idealen Stern-Gerlach-Experiment ist das mit dem Parameter p_0 möglich.) Verallgemeinerte Messungen kann man realisieren, indem man das zu messende System mit einem Hilffsystem verschränkt und an diesem projektiv misst. POVM stellt eine sehr allgemeine, abstrakte Form der Messung dar; es beinhaltet Projektionsmessungen und verallgemeinerte Messungen. POVM ist bei Fragestellungen nützlich, bei denen man sich nicht mit der konkreten Realisierung der Messung beschäftigen möchte, sondern nur mit den möglichen Messergebnissen und deren Wahrscheinlichkeiten.

Literatur

- [1] J. Audretsch, *Verschränkte Systeme* (Wiley, 2005)
- [2] http://www.audretsch.uni-konstanz.de/research/intro_unscharfe_messungen.pdf
- [3] P. Busch, in *Potentiality and Paasion-at-a-Distance*, R. Cohen et. al. (Ed.), S. 61–70 (Kluwer Acad. Publ., 1997)
- [4] A. Scherer, Diplomarbeit „Theorie, Simulation und Realisierung sequentieller schwacher Quantenmessungen an

individuellen Quantensystem“, Betreuer: J. Audretsch (Universität Konstanz, 2000)