UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Theoretische Festkörperphysik

Wintersemester 2010 - Übungsblatt 4

Ausgabe: 12.11.2010, Abgabe: 19.11.2010, Übung: 22.-24.11.2010

Aufgabe 15: Zustandsdichte für Supraleiter (4 Punkte)

In der Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) Theorie der Supraleitung ist das Anregungsspektrum von Einelektronen-Zuständen durch

$$E(\mathbf{k}) = \pm\sqrt{(\epsilon(\mathbf{k}) - E_\mathrm{F})^2 + \Delta(\mathbf{k})^2}$$

gegeben, wobei $\epsilon(\mathbf{k})$ die Elektronenenergie ohne Supraleitung und E_F die Fermi-Energie ist. Mit einer vereinfachten Wechselwirkung erhält man $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta$. Einen ähnlichen Ausdruck erhält man für andere Systeme bei denen die Wechelwirkung zu nicht-metallischen Grundzuständen führt, wie z.B. Ladungsdichtewellen, Spindichtewellen, etc.

Berechnen Sie die Zustandsdichte für einen 3-dimensionalen Supraleiter für $\Delta \ll E_\mathrm{F}$ und verwenden Sie die Zustandsdichte eines 3-dimensionalen Normalleiters (siehe Vorlesung). Skizzieren Sie die Zustandsdichte für einen 3-dimensionalen Supraleiters.

Aufgabe 16: 2DEG und Friedel-Oszillationen(*) - Für Tüftler (4 Bonuspunkte)

Betrachten Sie ein 2-dimensionales Elektronengas in der x-y-Ebene für $0 < x < L$. Bestimmen Sie die Elektronendichte $n(x)$ als Funktion von x für $T = 0$.

Hinweise: Verwenden Sie stehende Wellen mit entsprechenen Randbedingungen in x-Richtung und quasi-kontinuierliche Zustände mit periodischen Randbedingungen in y-Richtung. Überlegen Sie sich, dass gilt

$$n(x) = \sum_{\mathbf{k}} \langle c_\nu^\dagger c_\nu \rangle |\langle xy|\nu\rangle|^2$$

mit den sinnvoll normierten Zuständen $|\nu\rangle$. Die Fermi-Energie ist in dem Fall anisotrop. Nehmen Sie ein festes $k_{x,\mathrm{F}}$ an um die Fermienergie zu verwenden und führen Sie den Kontinuumslimit für k_x durch. Es ergibt sich dann:

$$n(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{k_{x,\mathrm{F}}} \mathrm{d}k_x \sin^2(k_x x)\sqrt{\frac{2m\epsilon_{x,\mathrm{F}}}{\hbar^2} - k_x^2}.$$

Lösen Sie das Integral mit

$$\int_0^1 \mathrm{d}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\sin^2(\xi\alpha) = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{J_1(2\xi)}{\xi}\right)$$

und skizziere $n(x)$ z.B. mit *Mathematica*.

Aufgabe 17: Grundzustandsenergie eines Elektronengases (3 Punkte)

Berechnen Sie die Grundzustandsenergie eines 3-dimensionalen Elektronengases bei $T = 0$.

Hinweis: Es ergibt sich

$$\frac{E^{(0)}}{N} = \frac{3}{5}\epsilon_{\mathrm{F}}.$$

Aufgabe 18: Stabilität eines Elektronengases (3 Punkte)

Zeigen und argumentieren Sie, dass der Ausdruck für die Energie pro Teilchen eines Elektronengases

$$\frac{E}{N} \overset{r_s \to 0}{\to} \frac{E^{(0)} + E^{(1)}}{N} = \left(\frac{2.210}{r_s^2} - \frac{0.916}{r_s}\right) \mathrm{Ry},$$

den man in erster Ordnung Störungstheorie erhält, die Stabilität des Elektronengases sicherstellt.