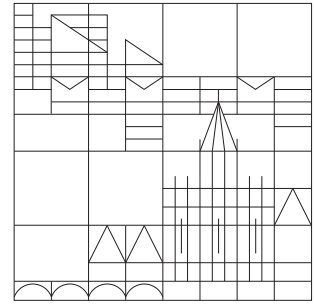




Theoretische Festkörperphysik Wintersemester 2010 - Übungsblatt 4

Ausgabe: 12.11.2010, Abgabe: 19.11.2010, Übung: 22.-24.11.2010

Aufgabe 15: Zustandsdichte für Supraleiter

(4 Punkte)

In der Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) Theorie der Supraleitung ist das Anregungsspektrum von Eielektronen-Zuständen durch

$$E(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{(\epsilon(\mathbf{k}) - E_F)^2 + \Delta(\mathbf{k})^2}$$

gegeben, wobei $\epsilon(\mathbf{k})$ die Elektronenenergie ohne Supraleitung und E_F die Fermi-Energie ist. Mit einer vereinfachten Wechselwirkung erhält man $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta$. Einen ähnlichen Ausdruck erhält man für andere Systeme bei denen die Wechselwirkung zu nicht-metallischen Grundzuständen führt, wie z.B. Ladungsdichtewellen, Spindichtewellen, etc.

Berechnen Sie die Zustandsdichte für einen 3-dimensionalen Supraleiter für $\Delta \ll E_F$ und verwenden Sie die Zustandsdichte eines 3-dimensionalen Normalleiters (siehe Vorlesung). Skizzieren Sie die Zustandsdichte für einen 3-dimensionalen Supraleiters.

Aufgabe 16: 2DEG und Friedel-Oszillationen(*) - Für Tüftler

(4 Bonuspunkte)

Betrachten Sie ein 2-dimensionales Elektronengas in der x - y -Ebene für $0 < x < L$. Bestimmen Sie die Elektronendichte $n(x)$ als Funktion von x für $T = 0$.

Hinweise: Verwenden Sie stehende Wellen mit entsprechenden Randbedingungen in x -Richtung und quasi-kontinuierliche Zustände mit periodischen Randbedingungen in y -Richtung. Überlegen Sie sich, dass gilt

$$n(x) = \sum_{\mathbf{k}} \langle c_{\nu}^{\dagger} c_{\nu} \rangle |\langle xy | \nu \rangle|^2$$

mit den sinnvoll normierten Zuständen $|\nu\rangle$. Die Fermi-Energie ist in dem Fall anisotrop. Nehmen Sie ein festes $k_{x,F}$ an um die Fermienergie zu verwenden und führen Sie den Kontinuumslimit für k_x durch. Es ergibt sich dann:

$$n(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_{x,F}} dk_x \sin^2(k_x x) \sqrt{\frac{2m\epsilon_{x,F}}{\hbar^2} - k_x^2}.$$

Lösen Sie das Integral mit

$$\int_0^1 d\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \sin^2(\xi \alpha) = \frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{J_1(2\xi)}{\xi} \right)$$

und skizziere $n(x)$ z.B. mit *Mathematica*.

Aufgabe 17: Grundzustandsenergie eines Elektronengases**(3 Punkte)**

Berechnen Sie die Grundzustandsenergie eines 3-dimensionalen Elektronengases bei $T = 0$.

Hinweis: Es ergibt sich

$$\frac{E^{(0)}}{N} = \frac{3}{5} \epsilon_F.$$

Aufgabe 18: Stabilität eines Elektronengases**(3 Punkte)**

Zeigen und argumentieren Sie, dass der Ausdruck für die Energie pro Teilchen eines Elektronengases

$$\frac{E}{N} \xrightarrow{r_s \rightarrow 0} \frac{E^{(0)} + E^{(1)}}{N} = \left(\frac{2.210}{r_s^2} - \frac{0.916}{r_s} \right) \text{Ry},$$

den man in erster Ordnung Störungstheorie erhält, die Stabilität des Elektronengases sicherstellt.