UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Elke Scheer (Experimentalphysik)
Raum P 1007, Tel. 4712
E-mail: elke.scheer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Guido Burkard (Theoretische Physik)
Raum P 807, Tel. 5256
E-mail: Guido.Burkard@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs - Sommersemester 2010
Übungsblatt 6, Ausgabe 25. 05. 2010
Abgabe am 31. 05. und 02. 06. 2010
Besprechung in den Übungen am 02. und 04. 06. 2010

Aufgabe 30 (E): Impulsverteilung im Potentialtopf (schriftlich - 7 Punkte)

Für ein Teilchen im eindimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden, also

$$V(x) = 0 \text{ für } |x| \leq a \quad \text{und} \quad V(x) = \infty \text{ für } |x| > a,$$

ergeben sich, wie Sie inzwischen wissen, als Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$\varphi_n^+(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos(k_n^+ x) \quad \text{und} \quad \varphi_n^-(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin(k_n^- x) \quad \text{mit} \quad k_n^+ = \frac{(2n-1)\pi}{2a} \quad \text{und} \quad k_n^- = \frac{n\pi}{a}.$$

(n läuft ab 1.)

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x \rangle$ des Ortes, $\langle x^2 \rangle$ und $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ als allgemeine Ausdrücke für jedes $\varphi_n^\pm$.

b) Rechnen Sie ebenfalls allgemein für jedes $\varphi_n^\pm$ die entsprechende Wellenfunktion $\tilde{\varphi}(p)$ im Impulsraum aus, also die Fourier-Transformierte

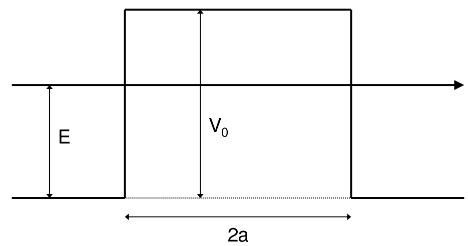
$$\tilde{\varphi}_n^\pm(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-a}^{a} \varphi_n^\pm(x)\, e^{-ipx/\hbar}\, dx.$$

c) Fertigen Sie Plots an von $|\tilde{\varphi}_n^\pm(p)|^2$ (als Funktion des Parameters pa) für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 24$. Interpretieren Sie das Bild des hochangeregten Zustandes in Annäherung an das klassische Verhalten.

d) Berechnen Sie wiederum allgemein für jedes $\varphi_n^\pm$ den Erwartungswert $\langle p \rangle$ des Impulses, $\langle p^2 \rangle$ und $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$. $\langle p^2 \rangle$ sollten Sie mit der Wellenfunktion im Ortsraum ermitteln, nach der Regel, dass der Erwartungswert eines Operators A $\quad \langle A \rangle = \int \varphi^*(x)\, A\, \varphi(x)\, dx$ beträgt. Was ergibt sich zusammen mit dem Ergebnis aus a) für Δx für die Unschärfe $\Delta x \Delta p$?

Aufgabe 31 (E): α-Zerfall als Anwendung des Tunneleffekts

a) In der Vorlesung wurde folgender Ausdruck für die Transmissionswahrscheinlichkeit durch eine symmetrische Rechteckbarriere der Breite $2a$ hergeleitet:



$$|T|^2 = \frac{1}{1 + (1 + (\varepsilon^2/4))\sinh^2(2\kappa a)}$$

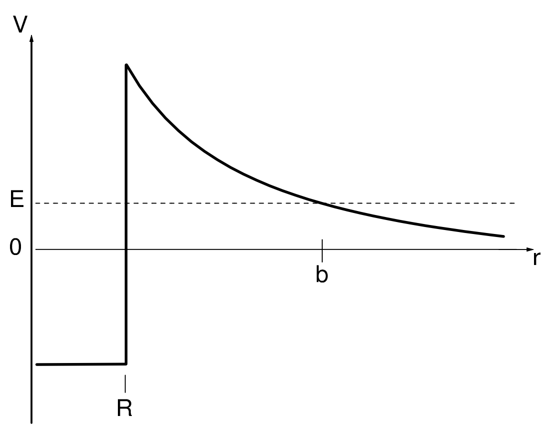
wobei $\varepsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$.

Zeigen Sie, dass für eine sehr dicke Barriere, also $\kappa a \gg 1$, sich die Transmissionswahrscheinlichkeit sehr gut als

$$|T|^2 \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp(-4\sqrt{2m(V_0 - E)}\frac{a}{\hbar}) \qquad (*)$$

nähern lässt.

b) Als Beispiel für das Tunneln durch eine Potentialbarriere wollen wir den α-Zerfall betrachten, d.h die Aussendung eines α-Teilchens (He-Kern = 2 Protonen und 2 Neutronen) aus einem Atomkern.

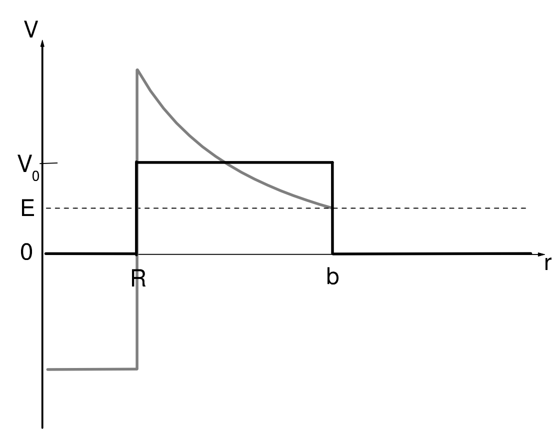


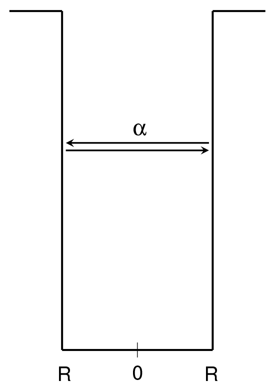
Für das α-Teilchen sieht das durch die restlichen Kernbestandteile verursachte Potential grob folgendermaßen aus: Innerhalb des Kernradius R wird es durch Kernkräfte gebunden (tiefer Potentialtopf). Entfernt sich das α-Teilchen über R hinaus von der Kernmitte, verhalten sich α-Teilchen und Restkern wie zwei entsprechende positive Punktladungen. Für $r > R$ setzen wir das Coulombpotential an. Wie lautet $V(r)$ für $r > R$?

Hat das α-Teilchen im Kern bereits eine Energie $E > 0$, kann es durch die Barriere tunneln und den Kern verlassen. Die Barriere ist nicht rechteckig, und das Potentialniveau außerhalb ist auch nicht auf beiden Seiten dasselbe. Bei vorgegebenem E lässt sich zunächst der Ort (Radius) b bestimmen, wo der Austritt aus der Barriere erfolgt, und somit die gesehene Barrierendicke.

Um (*) anwenden zu können, vereinfachen Sie das Potential wie skizziert. Nehmen Sie $V = 0$ an für $r < R$ und $r > b$. Mitteln Sie alle Werte des $1/r$-Potentials zwischen R und b und bestimmen so ein V_0 als Höhe einer Rechteckbarriere, durch die Sie die "schräge" Barriere sinnvoll ersetzen können.

Polonium werde durch α-Zerfall in Blei umgewandelt (entsprechende Isotope, so dass mit Weggang des α-Teilchens auch die Neutronenzahl erhalten bleibt). Nehmen Sie weiter $R = 1 \cdot 10^{-14}$m und $E = 10$MeV als gegebene Zahlenwerte an. Berechnen Sie b, V_0 und $|T|^2$.





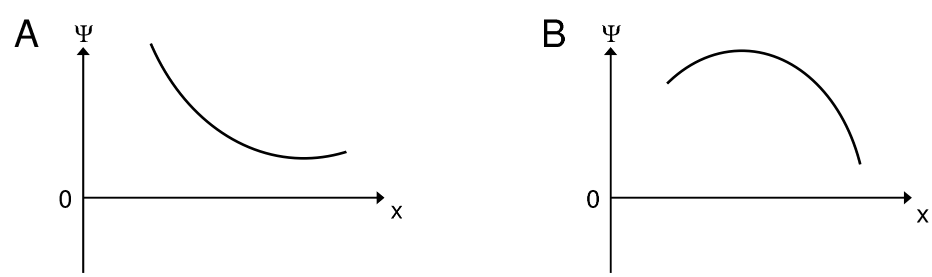
Um eine Zerfallswahrscheinlichkeit zu bestimmen, muss man außer der Transmissionswahrscheinlichkeit durch die Barriere noch die "Klopffrequenz" kennen, mit der das α-Teilchen gegen die Ränder des Kernpotentials stößt. Um diese abzuschätzen, interpretieren Sie Sie $E = 10$MeV als nicht-relativistische kinetische Energie des α-Teilchens. Das α-Teilchen werde ganz klassisch radial durch den Kern hin- und herreflektiert. Schätzen Sie aus Klopffrequenz und Transmissionswahrscheinlichkeit eine Halbwertszeit ab, wann das α-Teilchen mit 50prozentiger Wahrscheinlichkeit den Kern verlassen hat. Informieren Sie sich über Halbwertszeiten von Poloniumisotopen. Haben wir mit der vereinfachten Rechnung hier eine Chance, in der richtigen Größenordnung zu liegen?

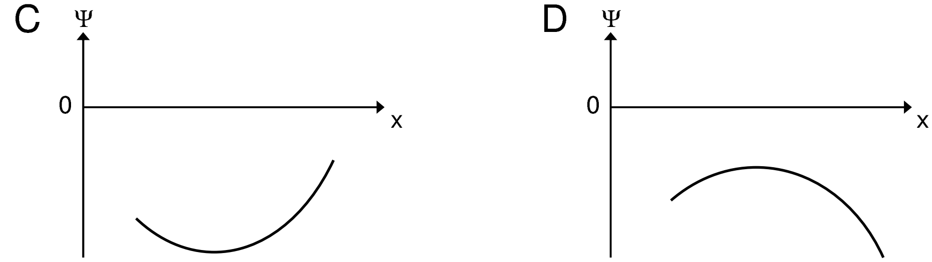
Aufgabe 32 (E): Qualitative Lösung der eindimensionalen Schrödingergleichung

a) Aus

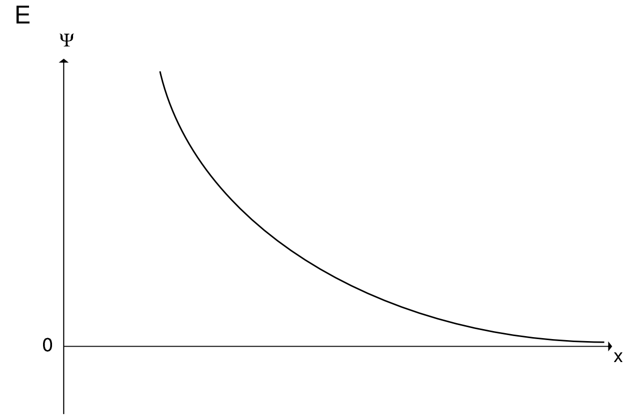
$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\,(V(x) - E)\;\Psi(x)$$

ersehen wir, dass für $V(x) - E > 0$ die Krümmung von Ψ, also $\Psi''(x)$, dasselbe Vorzeichen hat wie $\Psi(x)$ und für $V(x) - E < 0$ die Krümmung $\Psi''(x)$ entgegengesetztes Vorzeichen zu $\Psi(x)$ hat. (In dieser Aufgabe betrachten wir nur reelle Wellenfunktionen.) In welche der beiden eben genannten Kategorien fallen die im Folgenden skizzierten vier Funktionenstücke A bis D?



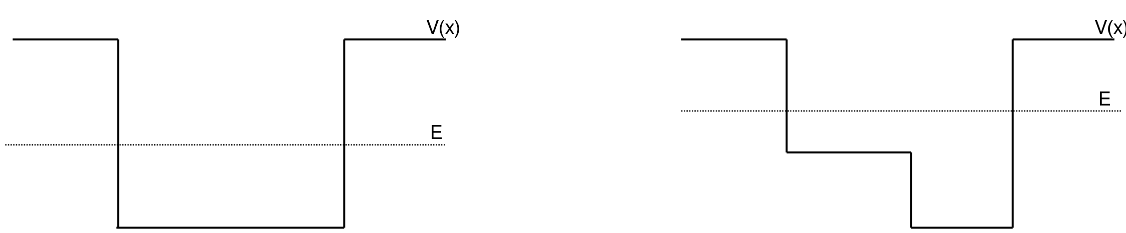


Und der Teil E, der sich asymptotisch (also für $x \to \infty$), von oben der Achse nähert, dessen Krümmung immer geringer wird, jedoch immer positiv bleibt?



b) i) Für welchen Fall, $V - E > 0$ oder $V - E < 0$, können Sie verschiedene der gezeigten Stücke zu einer stetigen Wellenfunktion zusammensetzen in einem Bereich, in dem $V - E$ sein Vorzeichen nicht ändert? Skizzieren Sie, wie dies z.B. aussehen könnte (Sie dürfen eine Art Funktionenstück auch mehrfach verwenden).
ii) Welche Art von Funktionenstücken können Sie für einen Halbraum, $]-\infty, 0]$ oder $[0, \infty[$, in dem $V - E$ sein Vorzeichen nicht ändert, nicht gebrauchen, weil Sie diese Stücke unter der Bedingung, dass die Wellenfunktion stetig sein und endlich bleiben soll, nicht fortsetzen können?
iii) Gehen Sie jetzt von einer Potentiallandschaft aus, bei der $V(x) - E$ sein Vorzeichen bei $x = a$ von negativ auf positiv wechselt. Skizzieren Sie auf einem endlichen Bereich um $x = a$ herum, auf dem die Wellenfunktion $\Psi(x)$ positiv sein soll, ein mögliches $\Psi(x)$. Welche mathematische Eigenschaft muss $\Psi(x)$ bei $x = a$ haben?

c) Aus expliziten Wellenfunktionen für bestimmte Potentiale wie z.B. dem Kasten, wissen Sie auch bereits, dass sich für $E > V(x)$ "oszillierende" Lösungen ergeben, und dass $\Psi(x)$ umso "schneller" oszilliert, je größer $E - V(x)$ ist.
Skizzieren Sie qualitativ Wellenfunktionen, die zu den eingezeichneten Energien (die natürlich jeweils Eigenwerte der Schrödingergleichung sein sollen) in den beiden gezeigten Potentialtöpfen passen. Die Wellenfunktionen sollen hier sowohl für $x \to \infty$ als auch für $x \to -\infty$ positiv sein. Sie dürfen jedoch irgendeine beliebige Anzahl von Nullstellen wählen.
Kennzeichnen Sie in Ihren Skizzen, wo Sie Funktionsstücke der Arten A bis E verwendet haben.



Aufgabe 33(T): Operator-Gymnastik **(schriftlich - 7 Punkte)**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie folgende Kommutatorrelationen für beliebige Operatoren A, B und C bzw. beliebige Funktionen $f(x)$ und $g(p)$:

i) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

ii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-Identität)

iii) $[p, f] = -i\hbar \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$

iv) $[x, g] = i\hbar \frac{\mathrm{d}g(p)}{\mathrm{d}p}$

b) (2 Punkte) Nehmen Sie an, A und B seien unabhängig von λ. Beweisen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung um $\lambda = 0$ das sogenannte *Baker-Hausdorff-Theorem*:

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = A + \lambda[B, A] + \frac{\lambda^2}{2}[B, [B, A]] + \frac{\lambda^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + ...$$

c) (1 Punkt) Sei $A = x$ und $B = -ip/\hbar$. Erläutern Sie, welche Rolle der Operator

$$T(\lambda) = e^{-i\lambda p/\hbar}$$

spielt und zeigen Sie, dass $T(\lambda)$ unitär ist. Welche Wirkung hat dieser Operator auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$?

d) (2 Punkte) Betrachten Sie zwei Operatoren A und B, die mit $[A, B]$ vertauschen, d.h.

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0.$$

Zeigen Sie damit die folgende Beziehung:

$$e^{\lambda A} e^{\lambda B} = e^{\lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2}[A,B]}$$

Hinweis: Stellen Sie eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die linke Seite auf und zeigen Sie, dass die Differentialgleichungen für beide Seiten dasselbe Anfangswertproblem darstellen.

Aufgabe 34(T): Neutronen im Gravitationsfeld

In einem speziellen Experiment mit Neutronen wurde der Einfluß der Quantentheorie untersucht (Nature 415, p.297 (2002)), denn Teilchen im Gravitationsfeld fallen nicht kontinuierlich, sondern in Sprüngen!
In der Tat wurden in dem Experiment unterhalb einer Mindesthöhe deutlich weniger Neutronen registriert als klassisch zu erwarten. In dieser Aufgabe lösen wir das quantenmechanische Problem von Teilchen in einer Anordnung wie in dem Experiment.

a) Das Problem ist eindimensional in z-Richtung. Der Boden ist ein (für Neutronen) total reflektierender Spiegel, d.h. das Potential lautet

$$V(z) = \begin{cases} mgz & z \geq 0 \\ \infty & z < 0 \end{cases} \quad .$$

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung für $z \geq 0$ lässt sich im Impulsraum leichter lösen. Wie lautet Sie? Geben Sie die Lösung $\tilde{\varphi}(p_z)$ dieser Differentialgleichung an.

Hinweis: Verwenden Sie als Ansatz eine Exponentialfunktion mit einem Polynom in p_z im Exponenten. Die Wellenfunktion braucht nicht normiert zu werden.

b) Führen Sie die inverse Fouriertransformation durch, um die Wellenfunktion im Ortsraum zu erhalten:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_z \; \tilde{\varphi}(p_z) \; e^{ip_z z/\hbar}.$$

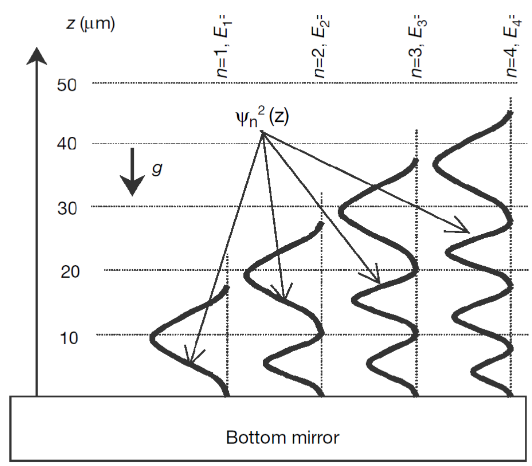
Ein Ausdruck der Form

$$Ai(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\tau \; \cos(\xi\tau + \frac{\tau^3}{3}),$$

eine sogenannte *Airy-Funktion*, darf als Integral stehenbleiben.

c) Die Eigenfunktionen des Problems sind also verschobene Airy-Funktionen. Beschaffen Sie sich einen Graphen der Airy-Funktion (z.B. aus Wikipedia, ausdrucken bzw. abzeichen). Geben Sie mit Hilfe der Randbedingung bei $z = 0$ die vier kleinstmöglichen Energien E_{1-4} für Neutronen ($m \approx 1,67 \times 10^{-27}$ kg) an.

d) Geben Sie für die ersten vier Zustände jeweils die Höhe z an, in der das Maximum der Wellenfunktion liegt ($Ai(\xi)$ maximal bei $\xi = -1.01879$). Die Werte sollten grob mit den Werten in der Zeichnung übereinstimmen.



Aufgabe 35(T): Harmonischer Oszillator und Unschärferelation

Bestimmen Sie mittels der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

die Nullpunktsenergie des harmonischen Oszillators. Suchen Sie dazu den Minimalwert der Energie-Eigenwerte als Funktion von Δx.
Was können Sie damit über die Wellenfunktion des Grundzustandes des harmonischen Oszillators vermuten? (vgl. Aufgabe 17)