

UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Elke Scheer (Experimentalphysik)

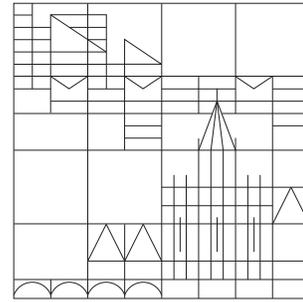
Raum P 1007, Tel. 4712

E-mail: elke.scheer@uni-konstanz.de

Prof. Dr. Guido Burkard (Theoretische Physik)

Raum P 807, Tel. 5256

E-mail: Guido.Burkard@uni-konstanz.de



Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs - Sommersemester 2010

Übungsblatt 5, Ausgabe 17. 05. 2010

Abgabe am 25. und 26. 05. 2010

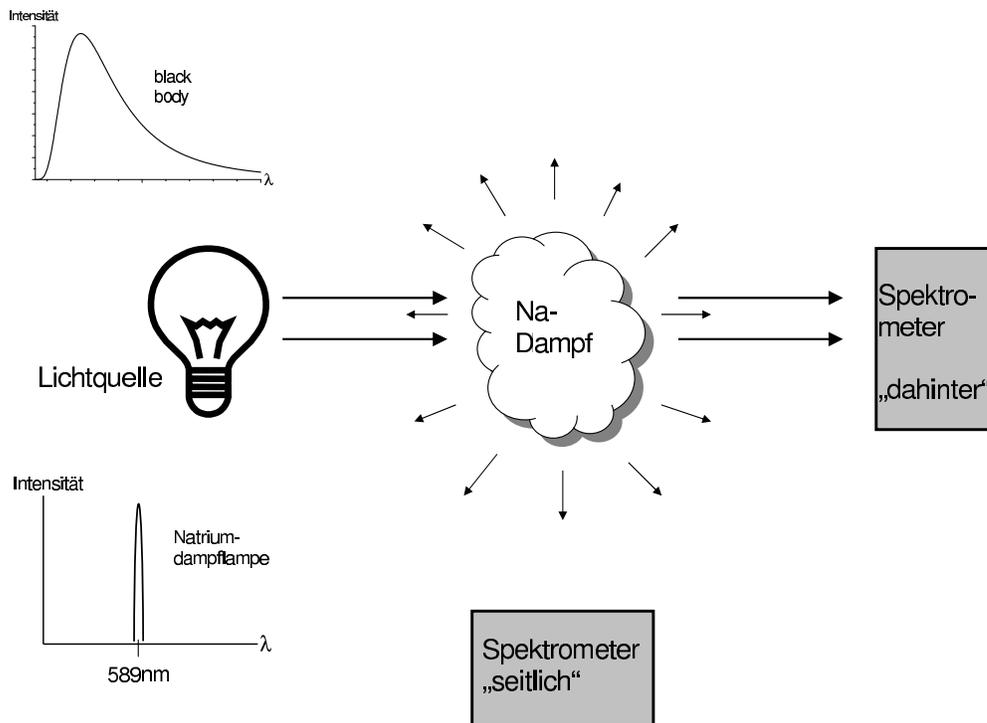
Besprechung in den Übungen am 26. und 28. 05. 2010

Aufgabe 24 (E): Resonanzabsorption und -fluoreszenz

a) Die dominante (und es sei die einzige) Spektrallinie von Natrium liegt bei 589nm, daher die gelbe Farbe einer Natriumflamme. Es ist der $3p \rightarrow 3s$ -Übergang. $n = 3$ ist die aus dem Bohrschen Atommodell bekannte Schalenquantenzahl. Dass ein einzelnes n -Niveau weiter unterteilt wird (hier betrachten wir die Unterniveaus s und p), haben Sie im Bohr-Sommerfeld-Modell mit seinen verschiedenen Bahnformen kennengelernt; quantitativ richtig wird das mit der Schrödingergleichung der Quantenmechanik berechnet werden. Die Bezeichnung D-Linie ist historisch und hat nichts mit den heute üblichen Bezeichnungen der Niveaus zu tun. (Es gibt noch eine weitere durch den Elektronenspin verursachte Aufspaltung, die dazu führt, dass man um 589nm herum eigentlich zwei sehr eng beieinanderliegende Spektrallinien sieht. Eine solch feine Auflösung betrachten wir hier jedoch nicht. Nehmen Sie also eine Linie an.)



Betrachten Sie folgenden Versuchsaufbau: Licht von einer Quelle trifft auf Natriumdampf. Zum einen wird das Spektrum des durchgehenden Lichts gemessen, zum anderen das Spektrum von seitlich emittiertem Licht.



Zeichnen Sie qualitativ jeweils das dahinter und das seitlich aufgenommene Spektrum im Vergleich zum Spektrum der Quelle für die Fälle, dass

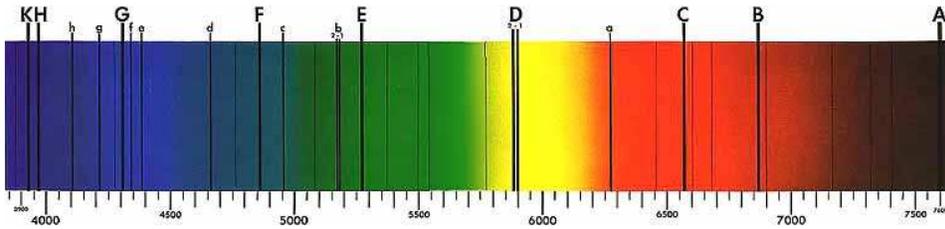
- i) die Lichtquelle ein schwarzer Strahler ist.
- ii) als Lichtquelle ebenfalls eine Natriumdampflampe verwendet wird.

Erklären Sie die "Messergebnisse".

b) Aus der Farbe eines Sterns schließen Astronomen auf seine Temperatur. Was muss man hierfür am Spektrum des Sterns anschauen und welches physikalische Gesetz wird verwendet?

Wonach muss man im Sternspektrum schauen, um Informationen über die Elementzusammensetzung besonders der äußeren Schichten des Sterns zu gewinnen? Welche Phänomene könnten derartige Beobachtungen erschweren oder verfälschen?

Erklären Sie das Zustandekommen der sogenannten Fraunhoferlinien im unten abgebildeten Spektrum der Sonne (also warum man dunkle Streifen sieht); Wellenlängen sind in Ångström in der Abbildung.



Der folgenden Tabelle können Sie entnehmen, welchen Elementen die starken Linien zuzuordnen sind.

Linie	Element	Wellenlänge [nm]	Linie	Element	Wellenlänge [nm]
A	O ₂	759,37	F	H	486,13
B	O ₂	686,72	G	H	434,05
C	H	656,28	G	Fe	430,79
D	Na	589,59	G	Ca	430,77
D	Na	589,00	H	Ca ⁺	396,85
D	He	587,56	K	Ca ⁺	393,37
E	Fe	527,04			

Ordnen Sie den drei Wasserstofflinien Übergänge aus dem Bohrschen Atommodell zu.

Warum ist es (mit den Ihnen hier vorliegenden Informationen) schwierig, das Vorkommen gerade des Elements, dem die Sonne den Namen gab, eindeutig zu belegen?

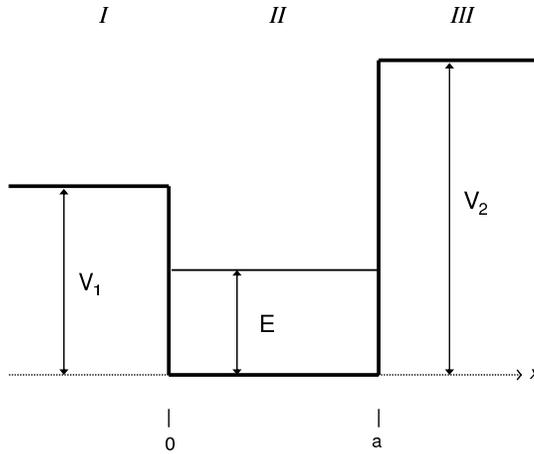
Sollte man wirklich meinen, dass auf der Sonne molekularer Sauerstoff vorkommt?

c) Beim Comptoneffekt haben Sie gelernt, dass dieser an freien Elektronen nicht möglich ist, weil außer Photon und Elektron ein weiterer Partner (z.B. ein ganzer Festkörper) fehlt, der den "Rückstoß" aufnehmen kann. Wenn in dem unter a) gezeichneten Aufbau die Quelle eine Na-Lampe ist und irgendein Na-Atom im Dampf ein Photon auf derselben Spektrallinie absorbieren soll, auf der die Quelle es ausgesandt hat, haben wir ein ähnliches Problem. Dieses tritt auch nochmals auf, wenn das Atom im Dampf auf der Spektrallinie, auf der es ein Photon aus Richtung der Quelle absorbiert hat, dann ein Photon in Richtung des seitlichen Spektrometers aussenden soll (auch wenn das - halt nicht beliebig massive - Atom seine Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit ändern darf). Erläutern Sie, worin hier der Konflikt zwischen Energie- und Impulserhaltung besteht.

Wie Sie noch lernen werden, führt in der Quantenmechanik jedoch die Tatsache, dass der Übergang, also Absorption bzw. Emission eines Photons, nach endlicher Zeit stattfindet, zu einer Unschärfe der Energie. Mit Rückstoß des Atoms weicht die Energie des Photons um $E_R = (E_2 - E_1)^2 / (2Mc^2)$ von der reinen Energiedifferenz $E_2 - E_1$ der elektronischen Niveaus 1 und 2 ab (M ist die Masse des Atoms). Eine sogenannte Lebensdauer bis zum Übergang von Δt erlaubt eine Energieabweichung bis zu $\Delta E = h / \Delta t$.

Prüfen Sie für die Natrium-D-Linie aus a) nach, ob E_R kleiner als ΔE ist. $\Delta t = 1\text{ns}$ (1 Nanosekunde). In diesem Fall ist die Resonanzabsorption bzw. -fluoreszenz wie im gezeichneten Versuchsaufbau möglich. (Ein Problem macht der Rückstoßeffect bei Anregungszuständen des Atomkerns, da dort die Übergangsenergien sehr viel größer sind als für die Elektronen in der Atomhülle. In diesem Zusammenhang können Sie sich als kleine Zusatzaufgabe informieren, was der Mößbauereffekt und Mößbauerspektroskopie sind.)

Aufgabe 25 (E): Gebundene Zustände im asymmetrischen Potentialtopf (schriftlich - 6 Punkte)



Betrachten Sie in einer Dimension einen Potentialtopf der Breite a mit senkrechten, endlich hohen und unterschiedlich hohen Wänden, d.h. das Potential hat für $x < 0$ den Wert V_1 , für $0 < x < a$ den Wert Null und für $x > a$ den Wert V_2 . Stellen Sie in allen drei Bereichen einen Ansatz für eine Wellenfunktion auf, für die die Energie $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ unterhalb der kleineren Wandhöhe liegt. Gewinnen Sie aus den Stetigkeitsbedingungen eine Gleichung für den Parameter ka .

Argumentieren Sie, dass die Gleichung immer mindestens eine Lösung hat, dass also in jedem Potentialtopf der gezeigten Art mindestens ein gebundener Zustand existiert.

Lösen Sie die Gleichung graphisch für die beiden Fälle $2mV_1a^2/\hbar^2 = \pi^2$ und $2mV_2a^2/\hbar^2 = \pi^2$ sowie $2mV_1a^2/\hbar^2 = 0.4\pi^2$ und $2mV_2a^2/\hbar^2 = 0.5\pi^2$. (Ausdrucke von Plots bzw. quantitativ saubere Zeichnungen auf Millimeterpapier sind beizulegen.)

Aufgabe 26 (E): Zeitentwicklung von Zuständen im Potentialtopf

Zur Zeit $t = 0$ regen wir die beiden untersten Zustände im Potentialtopf der Breite $2a$ mit unendlich hohen Wänden kohärent an, d.h. für die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ gilt

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)).$$

- Stellen Sie durch Lösen der zeitabhängigen Schrödingergleichung und mit Hilfe der bekannten Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ für den Potentialtopf die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ auf.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x, t)|^2$. Mit welcher zeitlichen Periode T ändert sich diese? Skizzieren Sie $|\Psi(x, t)|^2$ als Funktion von x für $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$ und $t = 3T/4$.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x \rangle (t)$.
- Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle H \rangle$ und $\langle H^2 \rangle$ und damit $\Delta E = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$.

Aufgabe 27(T): Galilei-Invarianz der Schrödingergleichung

a) Zeigen Sie, dass die (dreidimensionale) Schrödingergleichung eines freien Teilchens

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}, t)$$

invariant unter der folgenden *Galilei-Transformation* ist

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x' = x - vt \\y &\rightarrow y' = y \\z &\rightarrow z' = z.\end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\phi(\mathbf{r}', t)} \psi'(\mathbf{r}', t)$$

um zu zeigen, dass mit geeigneter Wahl von $\phi(\mathbf{r}', t)$ für $\psi'(\mathbf{r}', t)$ gilt

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' \psi'.$$

Wie lauten die Gleichungen, die $\phi(\mathbf{r}', t)$ erfüllen muß? Wie lautet die allgemeine Lösung $\phi(\mathbf{r}', t)$?

b) Diskutieren Sie das Ergebnis für den Spezialfall der ebenen Wellen.

Aufgabe 28(T): Die Stromdichte

(schriftlich - 5 Punkte)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ohne äußeres Feld als Funktion des Ortes und der Zeit für

a) (1 Punkt) eine ebene Welle

b) (2 Punkte) das eindimensionale Wellenpaket (siehe Aufgabe 17)

Die Diskussion der Wahrscheinlichkeitsstromdichte ändert sich, wenn elektromagnetische Felder auf ein geladenes Teilchen (Ladung q) wirken.

c) (2 Punkte) Da der Hamiltonoperator das skalare und das Vektorpotential enthält, muss die Wellenfunktion bei einer Eichtransformation mit verändert werden. Zeigen Sie, dass für eine *Eichtransformation*

$$A \rightarrow A' = A + \nabla \chi, \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \partial_t \chi$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $\chi(\mathbf{r}, t)$ die Wellenfunktion

$$\psi' = e^{i\chi q/\hbar} \psi$$

die Schrödingergleichung mit den neuen Potentialen erfüllt, wenn ψ Lösung der ursprünglichen Schrödingergleichung ist. (Die Wellenfunktion ist also *eichinvariant*, da sie sich nur um einen Phasenfaktor ändert.)

Aufgabe 29(T): Schrödinger-Gleichung im Impulsraum

Die Wellenfunktion eines Teilchens (im Ortsraum) genüge der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = H \Psi(\mathbf{r}, t)$$

mit dem Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}).$$

a) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung im Impulsraum, wenn das Potential $V(\mathbf{r})$ eine Fourier-Transformierte $\tilde{V}(\mathbf{p})$ besitzt?

b) Zeigen Sie, daß für den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(x) = \frac{m}{2} \omega^2 x^2$ der Hamilton-Operator in der Impulsdarstellung lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2} \hbar^2 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2}.$$