UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Elke Scheer (Experimentalphysik)
Raum P 1007, Tel. 4712
E-mail: elke.scheer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Guido Burkard (Theoretische Physik)
Raum P 807, Tel. 5256
E-mail: Guido.Burkard@uni-konstanz.de

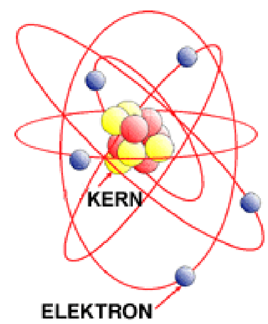
Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs - Sommersemester 2010

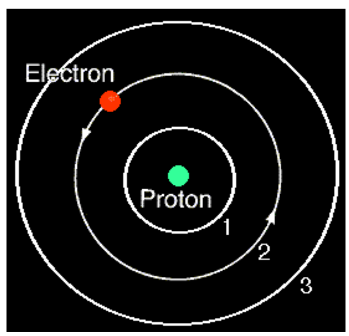
Übungsblatt 4, Ausgabe 10. 05. 2010

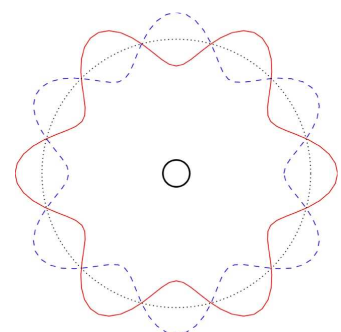
Abgabe am 17. und 19. 05. 2010

Besprechung in den Übungen am 19. und 21. 05. 2010

Aufgabe 18 (E): Das Bohrsche Atommodell







Dem (historischen) Bohrschen Atommodell liegt das Bild zugrunde, dass die Elektronen in Kreisbahnen um den Kern herumlaufen wie die Planeten um die Sonne. Ganz nach Newtonscher Physik bestimmt sich die Bahngeschwindigkeit daraus, dass sich die Zentrifugalkraft und die Coulombkraft zwischen Kern und Elektron die Waage halten. Als Postulat wird nun angenommen, dass der der Bewegung auf der Kreisbahn zuzuordnende Drehimpuls nur ganzzahlige Vielfache des Wirkungsquantums annimmt, $L = n\hbar$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$. (Die Wellenvorstellung spielte dabei insofern eine Rolle als dies der Situation entspricht, dass eine ganze Anzahl Wellenlängen ($\lambda = h/p$) genau auf den Kreisumfang passt (siehe rechte Abbildung).

a) Der Kern sei hier als ruhend bzw. im Vergleich zum Elektron unendlich schwer angesehen. Für ein einzelnes Elektron, das um einen Z-fach geladenen Kern kreist, leiten Sie folgende Ausdrücke für die erlaubten Bahnradien und zugehörigen Energien her:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{Z m_e e^2} \qquad \text{und} \qquad E_n = -\frac{Z^2 m_e e^4}{8n^2\varepsilon_0^2 h^2}$$

Die Energie ist auch ganz klassisch als Summe der potentiellen Energie im Coulombpotential und der kinetischen Energie aufzustellen. (Mit der Comptonwellenlänge $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$ und der sogenannten Feinstrukturkonstanten $\alpha = \frac{e^2}{2c\varepsilon_o h}$ werden r_n und E_n häufig als $r_n = \frac{n^2\lambda_C}{2\pi Z\alpha}$ und $E_n = -\frac{m_e c^2}{2}\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}$ geschrieben.) Geben Sie für n=1 und für Z=1 den Bahnradius in Angstrøm an.

b) Stellen Sie jetzt Formeln für Bahnradien und Energien der Niveaus auf mit dem Ansatz, dass Elektron und Kern um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen. Führen Sie dazu die reduzierte Masse als Parameter ein.

Aufgabe 19 (E): Spektrallinien aus dem Bohrschen Atommodell

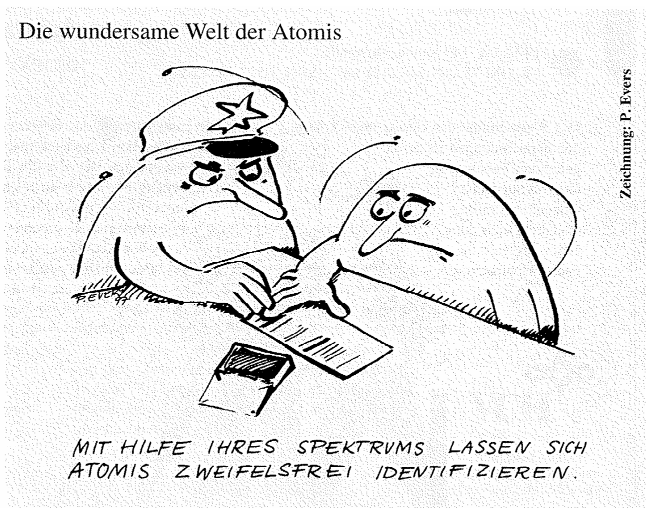
Das Bohrsche Atommodell kann jetzt das Auftreten von Spektrallinien erklären, indem angenommen wird, dass Elektronen unter Absorption oder Emission eines Photons zwischen verschiedenen Kreisbahnen springen können. Die Energie des Photons $\hbar\omega$ ist dann die Differenz $E_{n_2} - E_{n_1}$.

a) Emissionslinien, die auf demselben unteren Niveau enden, werden zu Serien zusammengefasst. Nennen Sie die Namen dieser Serien für Wasserstoff. Berechnen Sie für die untersten vier Serien jeweils die Wellenlänge der untersten Linie, also für die Übergänge n=2→n=1, n=3→n=2, n=4→n=3 und n=5→n=4. Welche Linien liegen im Sichtbaren (zwischen 400nm und 800nm)?

b) Berechnen Sie die Wellenlängen der entsprechenden Spektrallinien für einfach ionisiertes Helium. Welche Linien liegen hier im Sichtbaren?

c) Geben Sie die Wellenlängenunterschiede für die in a) genannten vier Linien zwischen Wasserstoff und Deuterium an (Isotopieverschiebung).

d) Berechnen Sie den Bahnradius des Elektrons für ein Wasserstoffatom im Zustand n=30. Geben Sie für den Übergang n=30→n=29 die zugehörige Wellenlänge an. In welchem Spektralbereich liegt diese?
Informieren Sie sich, wo sogenannte Rydberg-Atome natürlich vorkommen und mit welcher Methode man sie im Labor erzeugen und auch die für hohe n sehr dicht liegenden Energieniveaus selektiv ausmessen kann.



Aufgabe 20 (E): Temperaturstrahlung (schriftlich - 8 Punkte)

a) Mit der Kenntnis, dass die spektrale Energiedichte eines schwarzen Strahlers der Temperatur T *pro Frequenzintervall* gegeben ist als

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \tag{1}$$

und der Beziehung $c = \nu\lambda$ für Licht, leiten Sie her, dass *pro Wellenlängenintervall* die spektrale Energiedichte

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/k_B T\lambda) - 1} \tag{2}$$

beträgt.

b) Plotten Sie mit einem geeigneten Graphikprogramm $u(\nu, T)$ für T=6000K und ν von $1{\cdot}10^{14}$Hz bis $1{,}5{\cdot}10^{15}$Hz sowie $u(\lambda, T)$ in einem entsprechenden Wellenlängenbereich.

c) Leiten Sie aus (2) eine Gleichung her, aus der man durch Auflösen nach λ die Lage des Maximums von $u(\lambda, T)$ für gegebenes T bestimmen kann. Lösen Sie diese Gleichung zeichnerisch oder numerisch (nach dem Produkt λT) und beweisen Sie damit das Wiensche Verschiebungsgesetz.

d) Bestimmen Sie das Maximum der Energiedichte als Funktion der Frequenz, also von $u(\nu, T)$ aus (1), geben Sie also eine Formel für ein "Wiensches Verschiebungsgesetz" der Form $\nu_{max}(T)$ an. Wie in c) müssen Sie dafür eine Gleichung graphisch oder numerisch lösen.
Ergibt für festgelegtes T das Produkt von λ_{max} aus c) und ν_{max} die Lichtgeschwindigkeit? Wenn nein, erklären Sie in Worten, warum nicht.

e) Betrachten Sie die Vorder-(oder Rück-)Seite eines Menschen sehr grob genähert als Kreisfläche mit Radius 1m. Ein Strahlungssensor der Fläche 1cm^2 steht in 1m Höhe über dem Boden. In einem Wellenlängenintervall von $\Delta\lambda$=10^{-6}m um λ=$1{\cdot}10^{-5}$m wird eine Leistung von 35,7μW gemessen, in einem ebensogroßen Wellenlängenintervall um λ=$2{\cdot}10^{-5}$m registriert der Sensor 12,5μW.
Wie weit ist der Mensch entfernt und was ist seine Oberflächentemperatur? (Sie dürfen später in der Rechnung für beide Wellenlängen die Näherung $\exp(hc/k_B T\lambda) \gg 1$ verwenden.)

Wie nennt man die Methode und entsprechende Geräte, die durch Messen ausgesandter Strahlung die Temperatur eines Objekts bestimmen?

Aufgabe 21(T): Lineare Algebra (schriftlich - 6 Punkte)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie für zwei beliebige Vektoren ϕ und ψ eines Hilbertraumes die

a) Schwarzsche Ungleichung : $|\langle\phi|\psi\rangle| \leq ||\phi||\,||\psi||$

b) Dreiecksungleichung : $||\phi + \psi|| \leq ||\phi|| + ||\psi||$

Die Norm $||.||$ ist die Standardnorm, definiert über das Skalarprodukt, d.h. z.B. $||\phi|| = \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}$.

b) (2 Punkte) Der adjungierte Operator $A^\dagger$ eines Operators A ist definiert durch $\langle A^\dagger x|y\rangle := \langle x|Ay\rangle$. Ein Operator A heisst selbstadjungiert oder *hermitesch*, wenn gilt $A = A^\dagger$.
Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell und die Eigenvektoren orthogonal sind.

c) (2 Punkte) In Analogie zu den *Poisson-Klammern* in der Mechanik wird in der Quantenmechanik der Kommutator

$$[A, B] := AB - BA$$

zwischen zwei linearen Operatoren eingeführt.
Wenn A und B hermitesch sind, wann ist das Produkt AB auch hermitesch? Folgt aus $[A, B] = 0$ und $[B, C] = 0$ auch $[A, C] = 0$?

Aufgabe 22(T): Normierung von ebenen Wellen

Betrachten Sie ebene Wellen der Form

$$\psi_{p_x}(x) = Ce^{\frac{ip_x x}{\hbar}}$$

zu den (kontinuierlichen) Eigenwerten $p_x \in (-\infty, \infty)$.

Diese Funktionen können für den gesamten Raum ($x \in (-\infty, \infty)$) offensichtlich nicht auf 1 normiert werden. Warum?
Bestimmen Sie die Normierungskonstante C aus der Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_{p'_x}(x)\psi_{p_x}(x)\,\mathrm{d}x = \delta(p'_x - p_x).$$

Hinweise: Um das Integral zu lösen, betrachten Sie den Grenzfall

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} ...\,\mathrm{d}x$$

und zeigen Sie, dass

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{\pi x} = \delta(x),$$

also die Deltafunktion ergibt.

Aufgabe 23(T): Diffusion und Gauss'sches Wellenpaket

Die (eindimensionale) Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$\partial_t \psi(x,t) = D\partial_x^2 \psi(x,t)$$

beschreibt die Ausbreitung einer beleibigen Funktion $\psi(x,t)$ (z.B. Temperatur) mit der Zeit aufgrund von räumlichen Variationen.

a) Lösen Sie die Diffusionsgleichung für eine (normierte) Gaussverteilung mit einer zeitabhängiger Breite

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma(t)^2}} \quad (\sigma(t) > 0)$$

und finden Sie die zeitabhängige Breite $\sigma(t)$ der Funktion.

Hinweis: Für die zeitabhängiger Breite ergibt sich der Ausdruck

$$\sigma(t) = \frac{D}{\sigma'(t)}.$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung mit einem geeigneten Ansatz.

b) Diskutieren und vergleichen Sie das Ergebnis mit der zeitabhängigen Breite des Gauss'schen Wellenpaketes aus Aufgabe 17.