

UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Elke Scheer (Experimentalphysik)

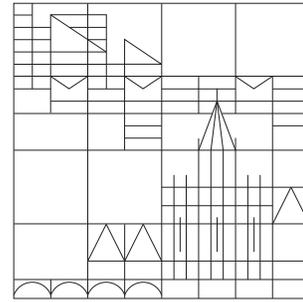
Raum P 1007, Tel. 4712

E-mail: elke.scheer@uni-konstanz.de

Prof. Dr. Guido Burkard (Theoretische Physik)

Raum P 807, Tel. 5256

E-mail: Guido.Burkard@uni-konstanz.de



## Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs - Sommersemester 2010

Übungsblatt 12, Ausgabe 05. 07. 2010

Abgabe am 12. und 14. 07. 2010

Besprechung in den Übungen am 14. und 16. 07. 2010

Blatt 12 ermöglicht Ihnen, Zusatzpunkte und Zusatz-Kreuze zu sammeln!

Hinweise zur Klausur:

Termin für Experimental-Teil: Di., 20.7., 16 - 18 Uhr, Audimax

Termin für Theorie-Teil: Do., 22.7., 10 - 12 Uhr, R 712 (Buchstabe A-K), R 611 (Buchstabe L-Z)

Anmeldung über Studies bis 13.7. (Exp.) bzw. 15.7. (Theo)

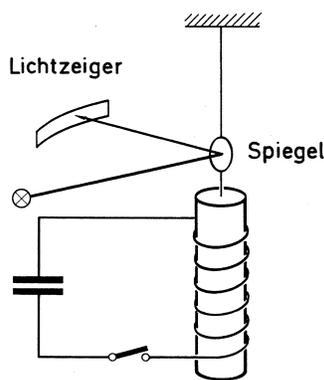
Hilfsmittel: Spickzettel (handgeschriebenes doppelseitiges DIN A4 - Blatt) und für den Exp.-Teil zusätzlich Taschenrechner.

Bitte Studentenausweis und Lichtbildausweis mitbringen!

Im Krankheitsfall abmelden im FB-Sekretariat (Telefon, e-mail) bis zum Beginn der Klausur.

Nachklausur: Experimental-Teil 11.10., 10-12 Uhr, R 711, Theorie-Teil 13.10., 12-14 Uhr, R 712

### Aufgabe 65 (E): Einstein-de-Haas-Versuch (schriftlich - 6 Zusatz-Punkte)



Ein Zylinder aus Cäsium (Höhe 5cm, Durchmesser 1cm) wird an einem Torsionsfaden in eine Spule gehängt. Zunächst ist der Zylinder unmagnetisiert. Durch hinreichend hohen Stromfluss durch die Spule wird der Zylinder dann bis zur Sättigung magnetisiert. (Stromfluss durch die Spule bleibt dann eingeschaltet und konstant. Wir wollen hier nicht wie oft üblich beim Einstein-de-Haas-Versuch eine Resonanzschwingung betrachten, sondern einfach eine statische Verdrehung des Torsionspendels.) Die Sättigungsmagnetisierung des Zylinders ist bekannt und beträgt  $M=0,618\text{JT}^{-1}$ .

Man beobachtet, dass das Torsionspendel um einen Winkel von  $20^\circ$  ausgelenkt wird. Seine Rückstellkonstante betrage  $D_r = 9,43 \cdot 10^{-17} \text{Nm}$ . Begründen Sie, warum wir erwarten, eine reine Spineigenschaft (ohne Einfluss von Bahndrehimpuls) sehen zu können. Leiten Sie aus den gegebenen Daten das gyromagnetische Verhältnis  $\gamma$  bzw. den  $g$ -Faktor für den Elektronenspin ab.

### Aufgabe 66 (E): Stern-Gerlach-Versuch (1 Zusatzkreuzchen)

In einem Stern-Gerlach-Experiment durchlaufen Silberatome der kinetischen Energie  $0,01 \text{eV}$  eine Flugstrecke (in  $x$ -Richtung) von  $L = 0,1 \text{m}$ , auf der der Gradient eines in  $z$ -Richtung zeigenden Magnetfeldes  $\partial B / \partial z = 100 \text{Tm}^{-1}$  beträgt. Auf einem Schirm unmittelbar am Ende der Flugstrecke werden zwei Teilchengruppen registriert, die in einem Höhenabstand von  $2,8 \text{mm}$  voneinander auftreffen. Nehmen Sie hier ebenfalls an, dass der  $g$ -Faktor für den Elektronenspin noch nicht bekannt ist und leiten Sie diesen aus den gegebenen Daten ab. Hätte man den gleichen Schluss auch ziehen können, wenn das Experiment mit Aluminiumatomen durchgeführt worden wäre?

### Aufgabe 67 (E): Kopplung von Drehimpulsen (1 Zusatzkreuzchen)

a) In Aufgabe 61 haben Sie den Quantendefekt kennengelernt. Durch Wechselwirkung mit den inneren Elektronen wurde die  $l$ -Entartung für angeregte Zustände des äußeren Leuchtelektrons aufgehoben. Gehen Sie für die folgende Aufgabe von einem  $E_{n,l}$ -Schema, wie es sich aus Aufgabe 61 für die Zustände mit  $n=2$  und  $n=3$  für Lithium ergibt, aus.

Die meisten Zustände spalten durch Spin-Bahn-Wechselwirkung weiter auf.  $s$ -Zustände spalten nicht auf. Alle anderen teilen sich in zwei mit  $j = l - \frac{1}{2}$  und  $j = l + \frac{1}{2}$ .

Das  $j = l + \frac{1}{2}$ -Niveau ist  $\Delta E = \frac{\mu_0 m_0 e^8}{512 \pi^4 \epsilon_0^3 \hbar^4} \cdot \frac{Z^4}{2n^3(l + \frac{1}{2})(l + 1)}$  nach oben verschoben,

das  $j = l - \frac{1}{2}$ -Niveau  $\Delta E = -\frac{\mu_0 m_0 e^8}{512 \pi^4 \epsilon_0^3 \hbar^4} \cdot \frac{Z^4}{2n^3 l(l + \frac{1}{2})}$  nach unten.

( $Z$  ist die Kernladungszahl.) Die Niveaus werden dann mit  ${}^n L_j$  bezeichnet, wobei  $L$  für den  $l$ -bezeichnenden Buchstaben  $S, P, \text{etc.}$  steht. Errechnen Sie die Energien aller sich so ergebender Unterniveaus zu  $n=2$  und  $n=3$  und skizzieren Sie diese in einem Termschema.

b) Jetzt wird das Lithiumatom in ein Magnetfeld der Stärke  $B = 0,5 \text{T}$  gebracht und die Niveaus spalten nach dem Zeeman-Effekt weiter auf.

Errechnen Sie die Aufspaltungen des  ${}^3 S_{1/2}$ -, des  ${}^2 P_{3/2}$ - und des  ${}^2 P_{1/2}$ -Niveaus. Zeichnen Sie ein Termschema und dorthinein alle erlaubten optischen Übergänge zwischen  ${}^3 S$ - und  ${}^2 P$ -Niveaus.

Benötigte Formeln:  $g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$ ,  $\Delta E = m_j g_j \mu_B B$ .

### Aufgabe 68(T\*): Auswahlregel im Harmonischen Oszillator

Betrachten Sie den Harmonischen Oszillator, gegeben durch

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (P^2 + X^2)$$

(in reduzierten Einheiten) mit den Eigenzuständen  $|n\rangle$  und den Energie-Eigenwerten  $E_n = \hbar\omega (n + \frac{1}{2})$ .

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Leiteroperatoren

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP)$$

die Kommutatoren  $[H, X]$  und  $[H, P]$  und zeigen Sie, dass  $[H, [H, X]] = (\hbar\omega)^2 X$ .

Folgern Sie damit aus  $\langle n | [H, [H, X]] - (\hbar\omega)^2 X | m \rangle = 0$ , dass  $\langle n | X | m \rangle \neq 0$  nur, wenn  $n - m = \pm 1$ .

b) Durch Darstellung von  $X$  durch die Leiteroperatoren leiten sie diese Auswahlregel auch direkt her.

*Anmerkung:* Im Harmonischen Oszillator sind also nur (Dipol-)Übergänge der Energie  $\hbar\omega$  möglich. Eine Verletzung dieser Auswahlregel gibt einen Hinweis auf die Anharmonizität eines Oszillators.

### Aufgabe 69(T\*): Pauli-Matrizen

(schriftlich - 5 Punkte)

Die beiden möglichen Zustände eines Teilchens mit dem Eigendrehimpuls  $s = 1/2$  können geschrieben werden als

$$\left| s = \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \quad \text{und} \quad \left| s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$$

Mit der üblichen Wahl der Quantisierung in Richtung der  $z$ -Achse, ist die Matrixdarstellung des Spin-Operators in dieser Basis durch  $\hat{\mathbf{s}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  mit den Pauli-Spinmatrizen

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie

$$\hat{\sigma}_i^2 = \mathbb{1}, \quad \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = i \hat{\sigma}_z, \quad [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i \hat{\sigma}_z, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} \times \hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2i \hat{\boldsymbol{\sigma}}.$$

b) (1 Punkt) Die Leiteroperatoren seien gegeben durch  $\hat{\sigma}_\pm := \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i \hat{\sigma}_y)$ . Bestimmen Sie die Wirkung von  $\hat{\sigma}_\pm$  auf die Zustände  $|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$ .

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\hat{s}_z$  und  $\hat{\mathbf{s}}^2$ . Zeigen sie die Gültigkeit der für alle Drehimpulse geltenden Matrixelemente

$$\begin{aligned} \langle sm'_s | \hat{s}_z | sm_s \rangle &= \hbar m_s \delta_{m_s, m'_s} \\ \langle sm'_s | \hat{\mathbf{s}}^2 | sm_s \rangle &= \hbar^2 s(s+1) \delta_{m_s, m'_s} \\ \langle sm'_s | \hat{s}_\pm | sm_s \rangle &= \hbar \sqrt{(s \mp m_s)(s \pm m_s + 1)} \delta_{m_s \pm 1, m'_s}. \end{aligned}$$

### Aufgabe 70(T\*): Getriebenes Zwei-Niveau-System (Spin-Resonanz)

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der Grundlage der Kernspinresonanz (NMR) sowie der Elektronenspinresonanz (ESR), die wichtige Methoden sind, um z.B. die magnetischen Eigenschaften von Festkörpern zu untersuchen.

Ein Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen befinde sich in einem zeitabhängigen äußeren Magnetfeld

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} B_1 \cos \omega t \\ B_1 \sin \omega t \\ B_0 \end{pmatrix}.$$

Das Magnetfeld bestehe also aus einem konstanten Anteil  $B_0$  in  $z$ -Richtung und einem rotierenden Feldanteil in der  $x$ - $y$ -Ebene.

Der Hamiltonoperator lautet  $H(t) = -\gamma \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}(t)$  mit dem Spinoperator  $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$ , wobei die kartesischen Komponenten  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$  in der Basis  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  durch die Pauli-Matrizen dargestellt werden.  $\gamma$  ist das gyromagnetische Verhältnis ( $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{s}$ ).

a) Zeigen Sie, dass der zeitabhängige Hamilton-Operator  $H$  in dieser Basis gegeben ist durch

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}.$$

b) Der zeitabhängige Zustandsvektor  $|\psi(t)\rangle$  für ein zeitabhängiges Zwei-Niveau-System lässt sich allgemein bzgl. der Basis  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  in der Form  $|\psi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle$  schreiben. Formulieren Sie die zeitabhängigen Bewegungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten  $c_+(t)$  und  $c_-(t)$ .

c) Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich das System im Zustand  $|\psi(0)\rangle \equiv |+\rangle$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $|c_-(t)|^2 \equiv |\langle -|\psi(t)\rangle|^2$ , dass sich das System zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  im Zustand  $|-\rangle$  befindet?

*Hinweis:* Überführen Sie das Differentialgleichungssystem für  $c_-(t)$  und  $c_+(t)$  in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $c_-(t)$  und lösen diese mit dem Ansatz  $c_-(t) = Ae^{i\lambda t}$ . Das Ergebnis lautet:

$$|c_-(t)|^2 = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \left( \frac{\Omega t}{2} \right) \quad \text{mit} \quad \Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}.$$

d) Unter welcher Bedingung wird die Übergangswahrscheinlichkeit  $|c_-(t)|^2$  groß und für welchen Wert von  $\omega$  tritt eine sogenannte Resonanz auf? Wie lautet  $|c_-(t)|^2$  genau an der Resonanzstelle? Skizzieren Sie  $|c_-(t)|^2$  für den Resonanzfall und z.B. für  $\omega = 3\omega_0$ .