UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711
Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3

Physik III: Integrierter Kurs (Theoretische Physik und Analytische Mechanik)
Wintersemester 2009/10

PROBE-KLAUSUR

(29.01.2010, in der Übung)

Bearbeitungszeit: 120 min. Gesamtpunktzahl: 31 Punkte

Aufgabe 1: Beschleunigung einer Rakete (10 Punkte)

Die Vierer-Beschleunigung ist definiert als

$$b^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} u^\mu$$

mit der Vierer-Geschwindigkeit u^μ und der Eigenzeit τ.
Damit ein Astronaut sich bei seinem Flug durchs All (d.h. keine Graviation) in seiner Rakete stets wie "zu Hause" fühlt, wird dafür gesorgt, dass die Beschleunigung der Rakete in dem System Σ', indem sie "momentan ruht", konstant gleich der Erdbeschleunigung $b'^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$ ist. Die Anfangsgeschwindigkeit der Rakete zur Zeit $t = 0$ sei $v = 0$. Diskutieren Sie im Folgenden den Flug im "erdfesten" System Σ, wenn die Beschleunigung in z-Richtung wirkt.

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Geschwindigkeit $v(t)$ der Rakete im Erdsystem Σ für $t > 0$

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + (\frac{gt}{c})^2}}$$

gilt. Skizzieren Sie die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die zeitabhängige Position der Rakete im Erdsystem Σ.

c) (2 Punkte) Wie ändert sich im Erdsystem die Energie der Rakete mit der Zeit?

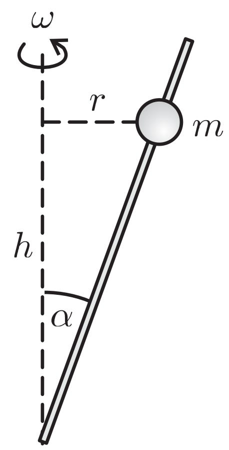
d) (2 Punkte) Stellen Sie einen expliziten Zusammenhang zwischen der Eigenzeit τ ("Alter") des Astronauten und der auf der Erde vergangenen Zeit t her!

Hinweis:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, \mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

Aufgabe 2: Die Perle auf dem rotierenden Draht (13 Punkte)

Eine Perle befinde sich auf einem geraden Draht, der einen festen Winkel α um die Drehachse z behält und mit, nicht notwendigerweise konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Zusätzlich wirke die übliche Gravitation.



a) (3 Punkte) Geben Sie die Zwangsbedingung an. Leiten Sie damit die Lagrangefunktion $L(z, \dot{z}, \varphi, \dot{\varphi})$ in Zylinderkoordinaten her.

b) (1 Punkt) Welche einfache Erhaltungsgröße lässt sich aus der Lagrangefunktion ablesen?

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie aus den Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen für dieses System.

d) (3 Punkte) Führen Sie eine Legendre-Transformation durch um die Hamiltonfunktion zu bestimmen. Woran erkennt man sofort, dass $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$?

e) (3 Punkte) Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf und vergleichen Sie diese mit den Bewegungsgleichungen aus c).

Aufgabe 3: Kanonische Transformationen (8 Punkte)

Gegeben seien ein mechanisches System mit der Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} q^4 + \frac{k}{2q^2}.$$

und die Erzeugende einer kanonischen Transformation:

$$F_1(q,Q) = -\sqrt{mk}\frac{Q}{q}.$$

a) (2 Punkte) Wie lauten die Transformationsformeln

$$q = q(Q,P) \text{ und } p = p(Q,P)?$$

Hinweis:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \; P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

b) (3 Punkte) Wie lautet die neue Hamilton-Funktion

$$H' = H'(Q,P)?$$

c) (3 Punkte) Geben Sie die zugehörende Lagrangefunktion $L(Q, \dot{Q})$ an und leiten Sie die Bewegungsgleichung(en) her.