UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711
Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3

Physik III: Integrierter Kurs (Theoretische Physik und Analytische Mechanik)
Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 12
(Ausgabe: 20.1.2010, Abgabe: 27.1.2010, Besprechung: 5.2.2010)

Am 29.01.2010 findet die Probeklausur in der regulären Übungszeit statt!

Aufgabe 32: Poisson-Klammern (schriftlich - 10 Punkte)

a) Zeigen Sie die *Leibnizsche Produktregel*

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$$

durch Anwendung der Definition der Poisson-Klammer.

b) Berechnen Sie die Poissonklammern der Komponenten des Drehimpulses mit den Koordinaten, den Impulsen, untereinander und mit dem Drehimpulsquadrat, also

$$\{L_i, q_j\}, \quad \{L_i, p_j\}, \quad \{L_i, L_j\} \quad \text{und} \quad \{L_i, \mathbf{L}^2\} \quad \text{mit} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Hinweis : Nutzen Sie die Leibnizregel aus a) und die fundamentalen Poissonklammern $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$ und $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ um das explizite Ausrechnen von Ableitungen zu vermeiden.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass der Drehimpuls für ein (zeitunabhängiges) Zentralpotential eine Erhaltungsgröße ist.

d) Zeigen Sie, dass der n-dimensionale isotrope harmonische Oszillator, gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{m\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i^2$$

die folgenden Erhaltungsgrößen besitzt:

$$A_{ij} = \frac{1}{2m} p_i p_j + \frac{m\omega^2}{2} q_i q_j.$$

Aufgabe 33: Keplerproblem und Hamiltonsche Mechanik

a) Für ein Zentralpotential (vgl. Keplerproblem) mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

finden Sie die Hamiltonfunktion und drücken Sie diese in Polarkoordinaten der Ebene aus. Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\gamma\frac{\mathbf{r}}{r}$$

in Polarkoordinaten folgende Form annimmt:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{p_\varphi^2}{r} - \gamma m\right)\mathbf{e}_r - p_r p_\varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

b) Nutzen Sie die Poissonklammern, um sich zu verdeutlichen, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_r = \frac{p_\varphi}{mr^2}\mathbf{e}_\varphi \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\varphi = -\frac{p_\varphi}{mr^2}\mathbf{e}_r \tag{2}$$

c) Machen Sie sich mit b) klar, dass $\{\mathbf{A}, H\} = 0$ gilt.

Hinweis: Die Produktregel aus Aufgabe 31a) kann hier nützlich sein.

Aufgabe 34: Kanonische Transformationen

a) Finden Sie die Parameter α und β für die die folgende Transformation kanonisch ist:

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p) \quad , \quad P = q^\alpha \sin(\beta p)\,. \tag{3}$$

b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(p, Q)$ der Transformation (3) aus den Gleichungen

$$q = -\frac{\partial F(p,Q)}{\partial p} \quad , \quad P = -\frac{\partial F(p,Q)}{\partial Q}\,. \tag{4}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass hier die Erzeugende als Funktion von p und Q betrachtet wird.

Zusatzaufgabe für Tüftler/Tüftlerinnen: Leiten Sie die Gleichungen (4) analog zur Vorlesung ab.