UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711
Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3

Physik III: Integrierter Kurs (Theoretische Physik und Analytische Mechanik)
Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 11
(Ausgabe: 13.1.2010, Abgabe: 20.1.2010, Besprechung: 22.1.2010)

Aufgabe 29: Legendretransformation

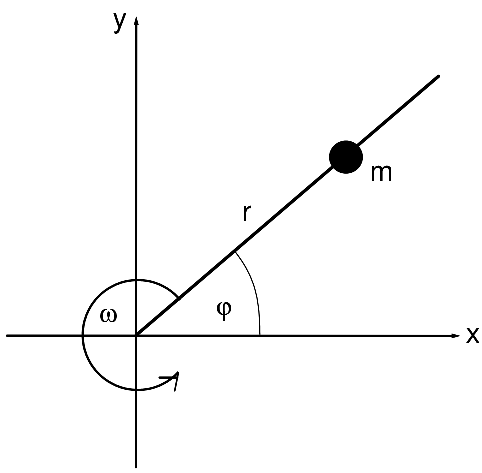
a) Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$f_1(x) = \alpha x^2 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \alpha(x+c)^2$$

mit $\alpha > 0$ und drücken Sie diese statt als Funktionen von x als Funktionen ihrer Ableitung $u = \partial f_{1/2}/\partial x$ als $\tilde{f}_1(u)$ bzw. $\tilde{f}_2(u)$ aus.
Welche Funktionen von x würden Sie erhalten, wenn Sie jetzt die ursprünglichen Zusammenhänge von u mit x vergessen, und $\tilde{f}_1(u)$ und $\tilde{f}_2(u)$ wiederum durch Auflösen und Einsetzen durch ihre Ableitungen ausdrücken? Interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Gehen Sie nun mittels Legendre-Transformationen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zu Funktionen $g_1(u)$ und $g_2(u)$ über. Wenden Sie auch auf $g_1(u)$ und $g_2(u)$ wiederum Legendre-Transformationen an und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teil a).

Aufgabe 30: zeitabhängige Zwangsbedingungen (schriftlich - 4 Punkte)



Eine Perle gleitet reibungsfrei auf einem Draht. Dieser rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Ursprung der x-y-Ebene, in der er sich befindet.
Stellen Sie bereits unter Ausnutzung der Zwangsbedingungen die Lagrange-Funktion auf. Gewinnen Sie die Hamilton-Funktion über eine Legendre-Transformation. Diese entspricht in diesem Beispiel nicht der Gesamtenergie.
Überprüfen Sie jedoch explizit, dass die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße ist. Woraus hätten Sie dies eher schließen können? Welches physikalische Phänomen ist in diesem Beispiel mit der verschwindenden Ableitung der Hamilton-Funktion nach der Zeit zu assoziieren?

Aufgabe 31: Relativistische Hamiltonfunktion in elektromagnetischen Feldern

a) Die relativistische Lagrangefunktion mit einem Potential $U(r)$ und ohne elektromagnetische Felder lautet:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - U(r)$$

mit $\beta = \frac{\mathbf{v}}{c}$.
Ermitteln Sie die relativistische Hamiltonfunktion H gemäss der Definition $H = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} - L$, und leiten Sie daraus die Einsteinsche Energie-Impuls-Beziehung für ein freies Teilchen ab:

$$H = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}.$$

b) Die nicht-relativistische Lagrangefunktion in allgemeinen zeitabhängigen Feldern lautet für ein Teilchen mit der Ladung q:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi(\mathbf{r},t) + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t).$$

Zeigen Sie, dass sich bei diesem Problem der verallgemeinerte Impuls $\mathbf{p}$ vom kinetischen ("normalen") Impuls unterscheidet. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion für ein Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld. Schreiben Sie das Resultat einmal als Funktion von $\{\mathbf{p}, \phi, \mathbf{A}\}$ und ein zweites mal als Funktion von $\{\mathbf{v}, \phi\}$. Erklären Sie anschaulich, warum die Gesamtenergie nur vom elektrischen Feld, nicht aber vom Magnetfeld abhängt.

c) Nun kombinieren wir die beiden vorigen Lagrangefunktion, um jene für ein relativistisches Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld zu erhalten:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - q\phi(\mathbf{r},t) + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t).$$

Berechnen Sie die entsprechende Hamiltonfunktion. Schreiben Sie das Resultat einmal als Funktion von $\{\gamma, \phi\}$ und ein zweites mal als Funktion von $\{\mathbf{p}, \phi, \mathbf{A}\}$.

Hinweis: Im zweiten Fall lautet das Resultat

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2} + q\phi.$$