UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711
Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3

Physik III: Integrierter Kurs (Theoretische Physik und Analytische Mechanik)
Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 10

(Ausgabe: 18.12.2009, Abgabe: 13.1.2010, Besprechung: 15.1.2010)

Aufgabe 26: Galilei-Transformation und Noether-Theorem (schriftlich) (6 Punkte)

a) (2 Punkte) Führen Sie eine Galilei-Transformation $z \to Z = z + \alpha t$ der Lagrangefunktion L für den freien Fall einer Masse m in einem homogenen Schwerefeld durch.

b) (2 Punkte) Für eine kontinuierliche Symmetrie der Lagrangefunktion, d.h.

$$L'(Z, \dot{Z}, t, \alpha) = L(Z, \dot{Z}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(Z, t, \alpha)$$

liefert das Noether-Theorem eine Erhaltungsgröße

$$I(z, \dot{z}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \left. \frac{\partial z(Z, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F(Z, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} .$$

Bestimmen Sie die Erhaltungsgröße I.

c) (2 Punkte) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und zeigen Sie damit, dass das Ergebnis aus b) eine Konstante der Bewegung ist.

Aufgabe 27: Teilchenbahnen in gekreuzten elektromagnetischen Feldern

Gesucht wird die Bahnkurve eines Teilchens mit Ladung q und Masse m in homogenen statischen elektrischen $\mathbf{E}$ und magnetischen $\mathbf{B}$ Feldern, welche senkrecht aufeinander stehen, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$ und $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.

Die Lagrangefunktion für das Teilchen lautet

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - q\,\phi(\mathbf{r}) + q\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

mit den elektromagnetischen Potentialen, aus denen die statischen Felder folgen durch

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \,.$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für das Teilchen lautet

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass die Wahl $\phi = -E\,y$ und $\mathbf{A} = -B\,y\,\hat{\mathbf{x}}$ zu den gewünschten elektromagnetischen Feldern führt.
Wie lautet dann die Lagrangefunktion?

Hinweis: Alle folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Die angegebene Reihenfolge wird empfohlen.

b) Zeigen Sie mit dem Euler-Lagrange Formalismus, dass die Lagrangefunktion von Teilaufgabe a) auf dieselben Bewegungsgleichungen führt wie die Newtonschen für diesen Spezialfall.

c) Welche zyklischen Variablen liegen vor und welche zeitlich erhaltenen Größen folgen daraus?

d) Bestimmen Sie mit dem Noetherschen Theorem (NT) ein *weiteres* Integral der Bewegung (d.h. eine weitere Erhaltungsgröße).
Hinweis: Das NT liefert für jede Symmetrie der Lagrangefunktion, d.h.

$$\tilde{L}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', \alpha) = L(\mathbf{r}', \mathbf{v}') + \frac{d}{dt}F(\mathbf{r}', t, \alpha),$$

eine Erhaltungsgröße

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{\alpha=0}.$$

e) Berechnen Sie die Bahnkurven $\mathbf{r}(t)$ für ein Teilchen, das zum Zeitnullpunkt am Ursprung ist und in $\hat{\mathbf{x}}$-Richtung fliegt, d.h. $\mathbf{r}(0) = 0$ und $\mathbf{v}(0) = \mathrm{v}_0\hat{\mathbf{x}}$.
Hinweis: Die komplexe Hilfsvariable $\zeta(t) = x(t) + i\,y(t)$ kann zur Lösung der Differentialgleichung nützlich sein.

Aufgabe 28: Das Larmor-Theorem

Beweisen Sie das Larmor-Theorem:

Ein Teilchen der Ladung e bewege sich unter dem Einfluss eines Potentials $V(\mathbf{r})$ in einem konstanten Magnetfeld $\mathbf{B}$. $V(\mathbf{r})$ sei drehinvariant um die Richtung des Magnetfeldes. Dann ist die Bewegung (im Rahmen der Newtonschen Mechanik) dieselbe wie diejenige eines Teilchens im Potential

$$V' = V(\mathbf{r}) + \frac{m}{8}{\omega_c}^2\rho^2$$

ohne externes Magnetfeld, falls die Bewegung in einem mit der Frequenz $\omega_c/2$ um die Magnetfeldachse rotierenden Koordinatensystem betrachtet wird. ω_c ist die Zyklotronfrequenz, ρ der Abstand von der Drehachse. In welchem Fall kann man davon sprechen, man habe durch den Wechsel ins rotierende System das Feld "wegtransformiert"?

Hinweis: Wählen Sie für das elektromagnetische Vektorpotential $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ und transformieren Sie auf Zylinderkkordinaten.