UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711
Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3

Physik III: Integrierter Kurs (Theoretische Physik und Analytische Mechanik)
Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 9
(Ausgabe: 16.12.2009, Besprechung: 8.1.2010)

Frohe Weihnachten !

Die beiden Aufgaben sind Bonusaufgaben (zählen also als Zusatzaufgaben)

Aufgabe 24: Das Keplerproblem

Die um 1610 veröffentlichten drei Gesetze der Planetenbewegung des *Johannes Kepler* (1571-1630) waren das Ergebnis seiner bahnbrechenden Analyse der 38jährigen Beobachtungen von *Tycho Brahe* (1546-1601) und legten den Grundstein zu *Newtons* (1643-1727) Entdeckungen. Während Kepler II (Erhaltung der Flächengeschwindigkeit) für alle Zentralkraftbewegungen Gültigkeit hat, sind Kepler I (Planeten auf Ellipsenbahnen) und Kepler III (Quadrat der Perioden ist den Kuben der Halbachsen proportional) auf Potentiale des reziproken Abstands beschränkt. In der folgenden Aufgabe sollen Sie das Keplerproblem mithilfe des Lagrange-Formalismus lösen.

a) Stellen Sie die Hamilton-Funktion und die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten für einen Massepunkt im Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{\gamma}{r}$$

auf.

b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ und die Energie E, sowie der Runge-Lenz-Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \alpha \mathbf{r}/r$$

mit geeigneter Wahl von α Erhaltungsgrößen der Bewegung sind.

c) Warum lässt sich das Keplerproblem auf ein effektiv zweidimensionales Problem reduzieren? Ermitteln Sie die Lagrangefunktion in ebenen Polarkoordinaten.

d) Geben Sie den Drehimpuls und die Energie in Polarkoordinaten an und zeigen Sie erneut, dass Drehimpuls und Energie erhalten sind.
Hinweis: Um zu zeigen, dass $\frac{d}{dt}E = 0$*, benutze man die Euler-Lagrange-Gleichungen für die beiden Polarkoordinaten.*

e) Bestimmen Sie die Trajektorie $r(\phi)$, und diskutieren Sie die unterschiedlichen Lösungen hinsichtlich der Energie oder anderer geeigneter Parameter. Für welche Werte von E erhalten Sie geschlossene und für welche offene Keplerbahnen?
Hinweise:

- *Benutzen Sie zunächst die Ausdrücke für de Energie E und den Drehimpuls L in Polarkoordinaten, um zu zeigen, dass*

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \pm\frac{mr^2}{L}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\gamma}{r}\right)}.$$

- Führen Sie dann die Substitution $u = 1/r$ durch, und benutzen Sie

$$\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos\left(\frac{-2au - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) + const.$$

- *Bringen Sie das Ergebnis auf die Form eines Kegelschnittes*

$$r(\phi) = \frac{r_0}{1 + \epsilon\cos\phi}$$

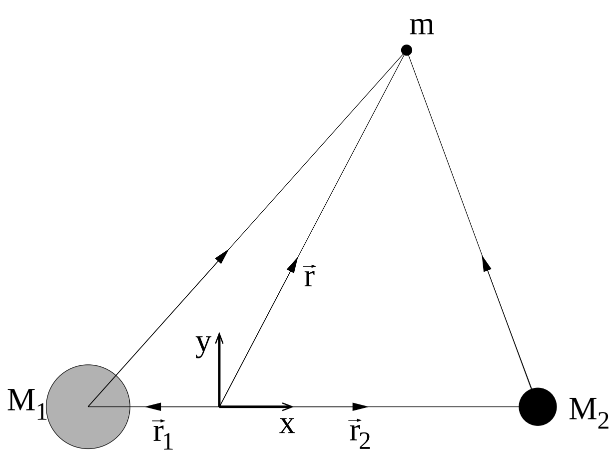
mit

$$r_0 = \frac{L^2}{m\gamma}\ , \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\gamma^2}}.$$

f) In welche Richtung zeigt der Runge-Lenz-Vektor? Berechnen Sie hierzu $\mathbf{A}$ im Perihel, dem Bahnpunkt mit minimalem Abstand vom Kraftzentrum.

Aufgabe 25: Die Lagrange-Punkte

Das klassische Dreikörperproblem ist im allgemeinen nicht lösbar, da es chaotische Dynamik aufweist. Aber schon Lagrange fand spezielle Lösungen im sogenannten „eingeschränkten zirkulären Dreikörperproblem“, die heute für die Positionierung von Satelliten eine Rolle spielen. Es sind dies die fünf Lagrange-Punkte (oder Librationspunkte), welche Gleichgewichtspunkte für leichte Objekte in der Nähe von zwei rotierenden Massen (z.B. Sonne und Erde) darstellen. Die Lagrange-Punkte $L_1, \ldots, L_5$ rotieren mit den Körpern mit und halten feste Abstände zu beiden ein. In der Nähe von L_1 ist seit 1995 das Sonnenobservatorium SOHO stationiert.



a) Formulieren Sie die allgemeinste Lagrange Funktion für drei verschiedene Massenpunkte M_1, M_2 und m, die ein abgeschlossenes (Newtonsches) System bilden (d.h. Energie, Impuls und Drehimpuls seien erhalten) und nur Paarwechselwirkungen aufweisen.

b) Es sollen nur Gravitationskräfte wirken. Mit der Annahme, dass die Masse m so klein sei, dass sie die Bewegung der anderen beiden Massen M_1 und M_2 nicht beeinfluße, erhält man das *eingeschränkte Dreikörperproblem.*
Lösen Sie das Keplerproblem für die beiden größeren Massen M_1 und M_2 unter der Annahme, dass die Keplerellipse zu einem Kreis entarte (*zirkuläres Problem*).

Hinweis: Führen Sie eine Schwerpunkts- und eine Relativkoordinate ein. Stellen Sie die Lagrange Funktion für die Relativkoordinate im Schwerpunktsystem auf und transformieren Sie diese in Polarkoordinaten (siehe Aufgabe 24). Wie lautet die Bewegung der Relativkoordinate für eine Kreisbahn? Bestimmen Sie anhand des mittleren Radius $R = 1AU = 1.5\,10^8$ km und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/$Jahr für das System Sonne-Erde die Summe der Massen $M_1 + M_2$.

c) Die Bewegung der leichten Masse m ($m \ll M_2, M_1$) werde im rotierenden Bezugssystem beschrieben, wobei die x-Achse vom Schwerpunkt zur Erde zeige und die y-Achse senkrecht dazu stehe (s. Skizze). (Da die Bewegung von M_1 und M_2 von m unabhängig ist, genügt es, in der Lagrangefunktion L nur die Terme zu betrachten, in denen m explizit auftaucht.)
Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten von m im rotierenden Bezugssystem lauten

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2\omega\dot{y} - \frac{1}{m}\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}, \\
\ddot{y} &= -2\omega\dot{x} - \frac{1}{m}\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}, \\
\ddot{z} &= -\frac{1}{m}\frac{\partial\bar{U}}{\partial z},
\end{aligned}$$

wobei das effektive Potential gegeben ist durch

$$\bar{U} = -m\left[\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{\gamma M_1}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}_1 \mid} + \frac{\gamma M_2}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}_2 \mid}\right].$$

(γ ist die Gravitationskonstante).

d) Welche Erhaltungsgröße ist offensichtlich? (Sie heißt Jacobi Integral.)

e) Identifizieren Sie die Scheinkräfte in den Bewegungsgleichungen, die aufgrund der Rotation des Bezugssystems auftreten.

f) Welche drei Gleichungen legen die Lagrangeschen Punkte der konstanten Positionen von m relativ zur Erde und Sonne fest?