UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

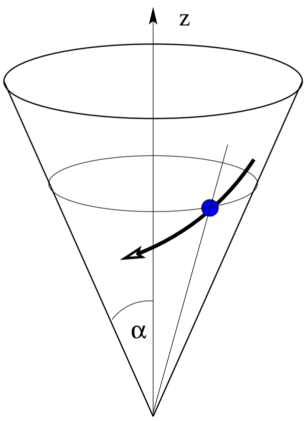
Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711
Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

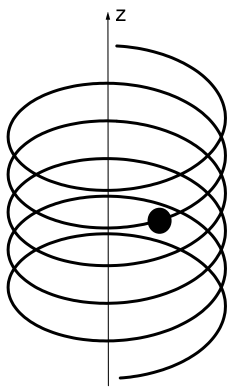
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3

Physik III: Integrierter Kurs (Theoretische Physik und Analytische Mechanik)
Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 8
(Ausgabe: 9.12.2009, Abgabe: 16.12.2009, Besprechung: 18.12.2009)

Aufgabe 21: Lagrange-Multiplikatoren





a) Ein Teilchen bewegt sich auf einem Kreiskegelmantel mit Öffnungswinkel α und unterliegt der Schwerkraft (siehe Skizze links).

i) Schreiben Sie die Lagrangefunktion für ein freies Teilchen im Gravitationspotential in Zylinderkoordinaten hin. Formulieren Sie außerdem die Zwangsbedingung, die die Bewegung des Teilchens auf den Kegelmantel beschränkt.

ii) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen unter Einbeziehung der Zwangsbedingung über einen Lagrange-Multiplikator. Eliminieren Sie dann aus den vier Gleichungen den Multiplikator und eine Koordinate, so dass Sie zwei Bewegungsgleichungen für zwei Koordinaten erhalten.

b) Gehen Sie von der Lagrangefunktion eines freien Teilchens ohne Schwerkraft aus. Beschränken Sie die Bewegung des Teilchens auf eine Schraubenlinie wie in der Skizze rechts. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung über die Methode der Lagrange-Multiplikatoren und lösen Sie sie.

Aufgabe 22: Variationsrechnung (schriftlich) (6 Punkte)

Als einfaches Beispiel der Variationsrechnung wollen wir ein Problem zunächst auf einen freien Parameter einschränken und diesen dann optimieren.
Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens der Masse m in dem Potential $V(z) = -mgz$ (negative z-Achse). Wir nehmen an, dass sich die Bahnkurve in der Form $z(t) = at^2 + bt + c$ schreiben lässt. Dabei soll gelten $z(0) = 0$ und $z(t_0) = z_0$, wodurch b und c festgelegt sind.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(z(t), \dot{z}(t), t)$.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Wirkung als Funktion des Parameters a und bestimmen Sie die minimale Wirkung bei Variation von a.

c) (2 Punkte) Skizzieren Sie für $z_0 = \frac{g}{2}t_0^2$ verschiedene Kurven $z(t)$ sowie die mit der minimalen Wirkung.

Aufgabe 23: Kürzester Weg auf Zylinder- und Kegeloberfläche

Ein Variationsproblem der Form

$$\int \mathrm{d}x L(y, y', x) = \text{Extremum} \Leftrightarrow \delta \int \mathrm{d}x L(y, y', x) = 0 \quad \text{mit} \quad y = y(x)$$

wird gelöst durch die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist also die Funktion $y(x)$, für die obiges Funktional extremal (d.h., minimal oder maximal) wird.

a) Gesucht ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte in der (x, y)-Ebene.

Hinweis: Verwenden Sie hierzu das Wegelement $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ und die obige Euler-Lagrange-Gleichung.

b) Finden sie die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Oberfläche eines Zylinders. Schreiben Sie dazu das Wegelement $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ in Zylinderkoordinaten ϕ und z ($r = \text{const.}$). Durch die Parametrisierung $z = z(\phi)$ erhalten Sie ein Funktional der Form $\int \mathrm{d}s = \int \mathrm{d}\phi\ L(z'(\phi))$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung den extremalen Weg $z(\phi)$. Um was für eine Kurve handelt es sich dabei?

c) Gesucht ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Oberfläche eines Kegels. Drücken Sie hierzu wieder das Wegelement $\mathrm{d}s$ in Zylinderkoordinaten (mit $r/z = \tan\alpha = \textit{const.}$), und wählen Sie die Parametrisierung $\phi = \phi(r)$. Bestimmen Sie das Extremum des Funktionals $\int \mathrm{d}r L(\phi'(r), r)$.

Hinweise:

- $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arccos\left(\frac{a}{x}\right)$$
- Das Ergebnis lautet:
$$r_m = r\cos\alpha(\phi - \phi_m).$$

d) Was ist α? Wie hängen die Integrationskonstanten r_m und ϕ_m mit den Randbedingungen der Kurve zusammen? Die Euler-Gleichung liefert lediglich das Extremum der Weglänge. Können Sie für einen Fall einen kürzeren Weg finden? Weswegen liefert obiges Ergebnis diese Kurven nicht? Was ergibt sich im Fall $\alpha \to \pi/2$?