UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711
Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3

Physik III: Integrierter Kurs (Theorie) und Analytische Mechanik
Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 2

(Ausgabe: 28.10.2009, Abgabe: 4.11.2009, Besprechung: 6.11.2009)

Aufgabe 4: Sphärische Lösungen der Wellengleichung (schriftlich) (8 Punkte)

Ebene Wellen sind nur eine spezielle Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\mathbf{r},t) = 0.$$

a) (3 Punkte) Verwenden Sie einen kugelsymmetrischen Ansatz $\psi(\mathbf{r},t) = \psi(r,t)$ und führen Sie die dreidimensionale Wellengleichung mit der Substitution $\phi(r,t) = r\psi(r,t)$ auf eine Differenzialgleichung für $\phi(r,t)$ zurück.

Hinweis: Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten lautet

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Differenzialgleichung für $\phi(r,t)$ aus a) mit Hilfe des Ansatzes

$$\phi(r,t) = \phi_+(kr+\omega t) + \phi_-(kr-\omega t)$$

gelöst wird.

c) (1 Punkt) Nehmen Sie an, dass die Funktionen $\phi_\pm$ periodisch sind und diskutieren Sie, warum die Lösungen aus b) *Kugelwellen* entsprechen.

d) (2 Punkte) Wie hängt die Intensität von Kugelwellen vom Abstand r ab? Ist dieses Ergebnis überraschend?

Aufgabe 5: Längenkontraktion

Σ und Σ' seien zwei mit $\mathbf{v} = \mathrm{v}\,\mathbf{e}_z = \mathrm{const}$ relativ zueinander bewegte Inertialsysteme.

a) Ein in Σ ruhender Stab schließt mit der z-Achse einen Winkel von 45° ein. Unter welchem Winkel erscheint er in Σ'?

b) Ein Teilchen habe in Σ die Geschwindigkeit $u = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}$. Welche Winkel bildet seine Bahn mit den z-Achsen in Σ und Σ'?

c) Ein Photon verlässt den Ursprung von Σ zur Zeit $t = 0$ in einer Richtung, die mit der z-Achse einen Winkel von $45°$ bildet. Welcher Winkel ergibt sich in Σ'?

Aufgabe 6: Addition von Geschwindigkeiten

Führt man zwei spezielle Lorentz-Transformationen, deren Geschwindigkeitsvektoren nicht in die gleiche Richtung zeigen, hintereinander aus, so ergibt sich eine spezielle Lorentz-Transformation mit einer zusätzlichen Raumdrehung. Im Folgenden nehmen wir an, dass die erste Transformation in z-Richtung und die zweite senkrecht dazu in x-Richtung erfolgt.

a) Ermitteln Sie die Matrix $L^{\mu}_{\ \nu}$ der resultierenden Transformation durch Ausführung der beiden speziellen Transformationen mit den Geschwindigkeiten v in z-Richtung und u in x-Richtung. Stellen Sie die resultierende Transformation durch eine spezielle Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $\mathbf{w}$ und einer Drehung um den Winkel α, d.h. $L = R(\alpha)\Lambda(\mathbf{w})$ dar und zeigen Sie, dass

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{u^2 + v^2 - \frac{u^2 v^2}{c^2}}. \tag{1}$$

Hinweis: Die Drehung ändert bestimmte Komponenten von L nicht.

b) Ist das Ergebnis (1) symmetrisch in u und v? Ergibt sich das selbe Ergebnis, wenn man erst in x- und dann in z-Richtung transformiert? Welche Koordinatentransformation verhält sich genauso?

c) Eine spezielle Lorentz-Transformation in $\mathbf{w}$-Richtung erhält man aus der bekannten Transformation in z-Richtung, indem man zuerst das Koordinatensystem so dreht, dass $\mathbf{w}$ parallel zu z liegt, danach entlang z transformiert, und dann die Drehung rückgängig macht. Zeigen Sie, dass sich damit ergibt (y-Komponente vernachlässigt) :

$$\Lambda(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(w) & -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & -\gamma(w)\frac{w_z}{c} \\ -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & 1 + (\gamma(w) - 1)\frac{w_x^2}{w^2} & (\gamma(w) - 1)\frac{w_x w_z}{w^2} \\ -\gamma(w)\frac{w_z}{c} & (\gamma(w) - 1)\frac{w_x w_z}{w^2} & 1 + (\gamma(w) - 1)\frac{w_z^2}{w^2} \end{pmatrix}$$

mit

$$\gamma(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}.$$