Skript zur Vorlesung

Physik - Integrierter Kurs III

(Theoretische Physik: Elektromagnetische Wellen, Spezielle Relativitätstheorie)

und Analytische Mechanik

Wintersemester 2009/10

Prof. Guido Burkard

Universität Konstanz

Fachbereich Physik

Stand: 24. Februar 2010

erstellt von David Öttinger (david.oettinger@uni-konstanz.de)
Korrekturen bitte an Stefan.Gerlach@uni-konstanz.de

Inhaltsverzeichnis

1 Das Gesetz der Lichtausbreitung

Motivation:

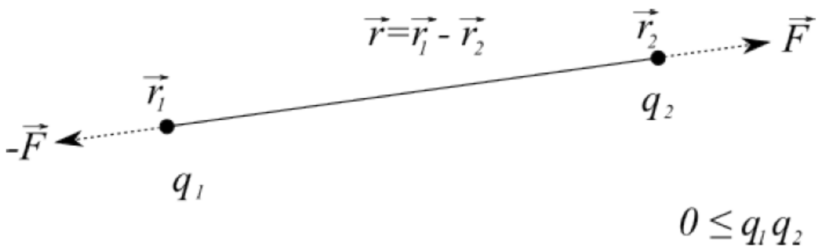
1. Optik
2. Spezielle Relativitätstheorie

Licht: elektromagnetische Welle → Elektrodynamik aus IK II

Vorgehen:

- Maxwell-Gleichungen (mit Quellen)
- Wellengleichung im Vakuum oder im Medium(ohne Quellen)
- Lösung der Wellengleichung
- Erzeugung und Detektion: Wechselwirkung mit Materie
- Quelle: elektrische Ladung

1.1 Das Coulomb-Gesetz



Coulomb-Kraft:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\, q_1\, q_2\, \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1.1}$$

1. Betrag der Kraft: $|\vec{F}| \propto \frac{1}{r^2}$
2. $\varepsilon\varepsilon_0$ heißt **Permittivität** oder dielektrische Leitfähigkeit
   ε: relative Dielektrizitätskonstante, Zahl $[\varepsilon] = 1$, beschreibt Medium zwischen q_1 und q_2 ($\varepsilon = 1$ im Vakuum)
   ε_0: Permittivität des Vakuums (elektrische Feldkonstante)

Einheiten (SI):

- $[q_1] = [q_2] =$ C (Coulomb)

- $[\vec{r}] = \mathrm{m}$ (Meter)
- $[\varepsilon_0] = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Jm}} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{VAs\,m}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ (Farad pro Meter)

$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{Fm}^{-1}$

1.2 Das elektrische Feld

Aus Gl. 1.1 folgt

$$\vec{F} = q_2 \underbrace{\vec{E}(\vec{r}_2)}_{\text{„Kraft pro Ladung“}} \tag{1.2}$$

wobei

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$$

das durch q_1 erzeugte elektrische Feld ist.
Für mehrere Ladungen gilt $(q_1 \to q_1, q_2, ...; q_2 \to q)$:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\, q q_i\, \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} = q \cdot \vec{E}(\vec{r}) \\ \Rightarrow \quad \vec{E} &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \end{aligned}$$

Im Kontinuum $(\sum q_i \to \int \mathrm{d}^3 r \ \varrho(\vec{r})...)$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \ \varrho(\vec{r}') \ \underbrace{\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}_{=-\nabla_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

Verwende:

$$\begin{aligned} \nabla &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \frac{\vec{r}}{r^3} &= -\nabla \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\Phi \\ \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \ \varrho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned}$$

Wir bilden die Divergenz:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \nabla \cdot \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z \\ \operatorname{div} \vec{E} &= -\nabla \cdot \nabla\Phi = -\nabla^2\Phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \ \varrho(\vec{r}') \ \underbrace{\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')} \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$\nabla \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\varrho(\vec{r}) \tag{1.3}$$

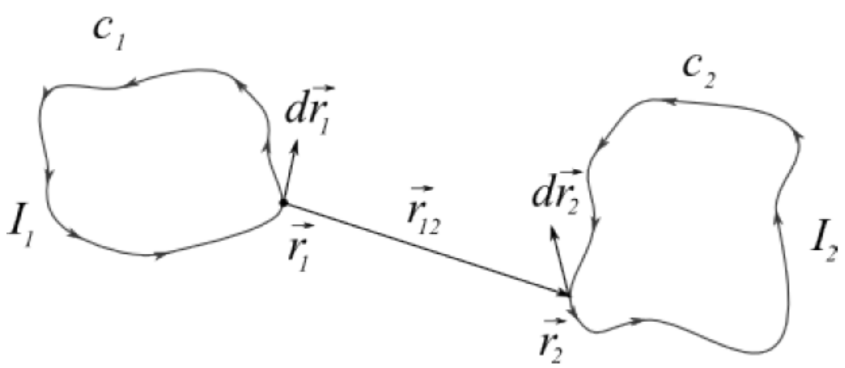
Hierfür wurden einige Annahmen bezüglich des Mediums zu Grunde gelegt: Es soll linear, homogen und isotrop sein. Bei nicht isotropem Medium, ersetze das skalare ε durch den Tensor ε_{ij} bzw. $\frac{1}{\varepsilon}$ durch das Inverse ε_{ij}^{-1}.
Die Dielektrische Verschiebung ist

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},$$

und damit:

$$\nabla\vec{D} = \varrho$$

1.3 Das Ampèresche Gesetz



Auf zwei stromführende Leiter c_1 und c_2 wirkt eine Kraft:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\, I_1 I_2 \oint_{c_1}\oint_{c_2} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1 \times (\mathrm{d}\vec{r}_2 \times r_{12})}{r_{12}^3} \\ &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\, I_1 I_2 \oint_{c_2} \mathrm{d}\vec{r}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dies folgt aus $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Bemerkung:

1. ebenfalls „$\propto \frac{1}{r^2}$-Gesetz"

2. $\mu\mu_0$ heißt **Permeabilität**.
   μ: relative Permeabilität, $[\mu] = 1$, $\mu = 1$ im Vakuum und auch sonst ist häufig $\mu \approx 1$.
   μ_0: Permeabilität des Vakuums

In SI-Einheiten:

- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$,

- $[\mu_0] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

1.4 Das Magnetfeld

$$\vec{F} = I_1 \oint_{C_1} \mathrm{d}\vec{r}_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1) \tag{1.5}$$

Für Gl. 1.5 gilt im Grenzfall, dass anstelle des Stromfadens C_1 ein einzelnes Teilchen tritt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{r}_1 &= \vec{v}(t)\mathrm{d}t \\ I_1\mathrm{d}t &= q \\ \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{Lorentz-Kraft} \end{aligned}$$

magnetische Induktion (**Biot-Savart**): $$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \tag{1.6}$$

Magnetfeld, magnetische Feldstärke: $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ in cgs mit $\mu = 1$: $\vec{B} = \vec{H}$

Für beliebige Stromdichten wird Gl. 1.6 zu

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{\nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} = \nabla \times \vec{A} \tag{1.7}$$

mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{1.8}$$

Das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ heißt Vektorpotential:

1.
$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla\vec{B} = \nabla(\nabla \times \vec{A}) = 0 \tag{1.9}$$
   Es gibt keine magnetischen Ladungen (Monopole)

2.
$$\operatorname{rot} \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \tag{1.10}$$

1.5 Eichtransformationen

$$\nabla \times (\nabla\chi) = 0$$

Es gibt also eine Eichfreiheit: $\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi$
Man legt eine Eichung fest, wie z. B. hier die **Coulomb-Eichung**:

$$\nabla\vec{A} = 0 \tag{1.11}$$

Einsetzen in Gl. 1.8:

$$\begin{aligned} \nabla\vec{A} &= -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' j(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \vec{j}(\vec{r}') \left(-\nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla_{\vec{r}'} \vec{j}(\vec{r}') \qquad \text{partielle Integration (Greenscher Satz)} \\ &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \dot{\varrho}(\vec{r}') = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\dot{\Phi}(\vec{r}) \qquad \text{Kontinuitätsgleichung: } \nabla\vec{j} = \dot{\varrho} \end{aligned}$$

D. h. $\vec{A}$ in Gl. 1.8 ist das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung für stationäre Ladungs- und Stromverteilungen ($\dot{\varrho} = 0$, $\dot{\vec{j}} = 0$). Es folgt:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{A} = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \underbrace{\nabla^2_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')} = \mu\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \qquad \text{nur Magnetostatik}$$

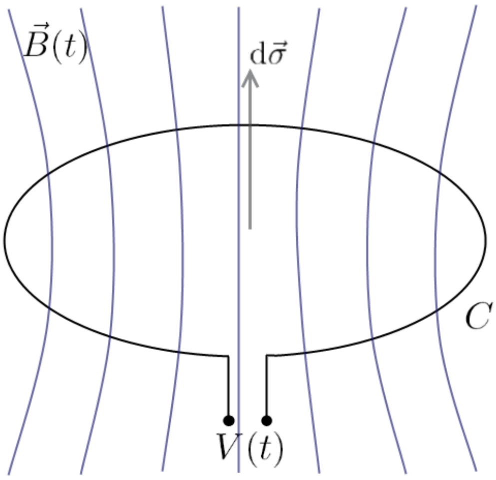
In der **Elektrodynamik** sind hingegen beliebige nicht-stationäre $\varrho(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$ erlaubt:

$$\nabla(\nabla\vec{A}) = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\nabla\dot{\Phi} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\dot{\vec{E}} \qquad \text{Maxwellscher Verschiebungsstrom}$$

Es gilt somit insgesamt:

$$\nabla \times \vec{B} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\dot{\vec{E}} = \mu\mu_0\vec{j} \tag{1.12}$$

1.6 Das Faradaysche Induktionsgesetz



Der magnetische Fluss durch C ist:

$$\Phi(t) = \int_A \vec{B}(\vec{r}, t)\mathrm{d}\vec{\sigma}$$

Nach Faraday wird bei einer Flussänderung eine Spanung induziert:

$$V(t) = -\dot{\Phi}(t) \tag{1.13}$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_C \vec{E}(\vec{r}, t)\mathrm{d}\vec{s} \\ &= \int_A \left(\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)\right) \mathrm{d}\vec{\sigma} \qquad \text{Stokes} \end{aligned}$$

Der Vergleich mit Gl. 1.13 ergibt:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\dot{\vec{B}}(\vec{r}, t)$$

Mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\vec{E} + \dot{\vec{A}}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \vec{E} + \dot{\vec{A}} &= -\nabla\Phi \end{aligned}$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \dot{\vec{A}} \tag{1.14}$$

Bem.: $\dot{\vec{A}}$ kommt in der Elektrostatik/Magnetostatik nicht vor.

1.7 Maxwell-Gleichungen

homogene	inhomogene
$\nabla\vec{B} = 0$	$\nabla\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\varrho$
$\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$	$\nabla \times \vec{B} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\dot{\vec{E}} = \mu\mu_0\vec{j}$

(1.15)

Kontinuitätsgleichung: $\dot{\varrho} + \nabla\vec{j} = 0$ (1.16)

(Coulomb-)Lorentzkraft: $\vec{F} = q(E + \vec{v} \times \vec{B})$ (1.17)

Potentiale:
$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\Phi - \dot{\vec{A}} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

Eichtransformationen:
$$\left.\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\chi \\ \Phi' &= \Phi - \dot{\chi} \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Coulomb-Eichung: $\nabla\vec{A} = 0$ (1.20)

Bem.: Die Coulomb-Eichung ist erreichbar durch eine Eichtransformation mit $\nabla^2\chi - \nabla\vec{A} \Rightarrow \chi = \ldots$.

1.8 Elektromagnetische Wellen

Die Coulomb-Eichung $\nabla\vec{A} = 0$ erhält man durch Einsetzen von Gl. 1.18 in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (1.15).

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\varrho \qquad \text{(Poisson)} \\ \nabla^2\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\nabla\dot{\Phi} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\dot{\vec{A}} &= \mu\mu_0\vec{j} \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

Im Raumbereich ohne Quellen (freie Felder), $\varrho = 0$, $\vec{j} = 0$:

$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \qquad \text{mit } \Phi \to 0 \text{ für } |\vec{x}| \to \infty$$

Mit $u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$ bleibt:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{u^2}\ddot{\vec{A}} = 0 \tag{1.22}$$

Die **Wellengleichung** für die Komponenten von $\vec{A}$ folgt mit Gl. 1.18:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{u^2}\ddot{\vec{E}} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{u^2}\ddot{\vec{B}} = 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Lösungen der Wellengleichung:

Die homogene Wellengleichung lautet:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{u^2}\ddot{\Psi} = 0 \tag{1.24}$$

Wobei Ψ eine Komponente von $\vec{A}$, $\vec{B}$ oder $\vec{E}$ und $u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$ ist. Für ebene Wellen gibt es folgende spezielle Lösungen der Wellengleichung:

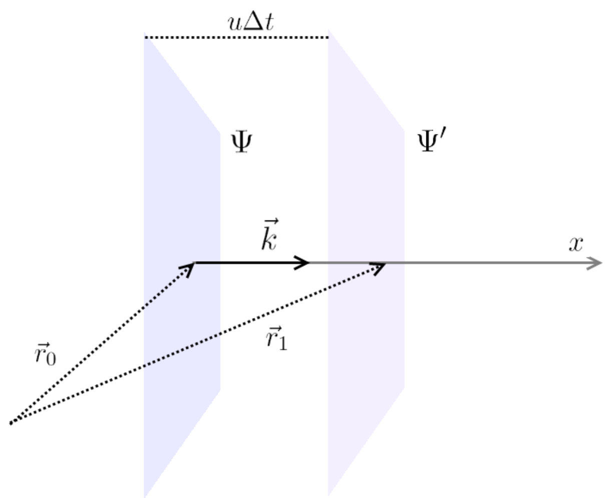
$$\Psi(\vec{r}, t) = f_-(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + f_+(\vec{k}\vec{r} + \omega t) \qquad \vec{k} \in \mathbb{C}^3, \omega \in \mathbb{R}$$

Wobei $f_\pm(\varphi_\pm)$ beliebige (ausreichend oft differenzierbare) Funktionen der Phase $\varphi_\pm = \vec{k}\vec{r} \pm \omega t$ sind.
Einsetzen in die Wellengleichung ergibt:

$$\omega^2 = u^2k^2 \Leftrightarrow \omega = u|\vec{k}| \qquad \textbf{Dispersionsrelation}$$

Flächen konstanter Amplitude $\Psi(\vec{r}, t_0)$ zu fester Zeit t_0 sind gegeben durch $\vec{k}\vec{r} = \text{const.}$.
Diese Flächen mit konstantem Ψ sind **Ebenen** mit der Normale $\hat{k}$.

Betrachte z. B. f_+:
$\Psi(\vec{r}, t) = f_+(\varphi_+)$ und wähle $\vec{k} \parallel \hat{x}$, $|\vec{k}| = k$.



$$\vec{k}\vec{r}_0 = kx_0 = -\omega t_0 + \varphi_+ \qquad \Psi(\vec{r}_0, t_0) = f_+(\underbrace{\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t_0}_{=\varphi_+}) = f_+(\varphi_+)$$

$$\vec{k}\vec{r}_1 = kx_1 = -\omega t_1 + \varphi_+ \qquad \Psi(\vec{r}_1, t_1) = f_+(\vec{k}\vec{r}_1 - \omega t_1) = f_+(\varphi_+) \qquad \Psi(\vec{r}_0, t_0) = \Psi(\vec{r}_1, t_1)$$

Daraus folgt:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = -\frac{\omega}{k} = -u$$

u ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Im Vakuum, mit $\varepsilon = \mu = 1$, gilt:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.99 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1} = c$$

Im Allgemeinen:

$$u = \frac{c}{n}$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit und $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ der **Brechungsindex**. Oft ist $\mu \approx 1$, sodass $n = \sqrt{\varepsilon}$ angenommen werden kann.

Zur Fourier-Transformation : $f(x) \to \hat{f}(k)$

Es gibt zwei unterschiedliche Definitionen:

	Physik	Mathematik
Fourier-Transformation	$\hat{f}(k) = \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ikx} f(x)$	$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ikx} f(x)$
Inverse Fourier-Transformation :	$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{ikx} \hat{f}(k)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{ikx} \hat{f}(k)$

Bei Funktionen der Zeit:

$$\hat{f}(\omega) = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{ikx} f(t)$$
$$f(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{-i\omega t} \hat{f}(\omega) \qquad \text{oft: } \hat{f}(\omega) \to \text{“}f(\omega)\text{“}$$

Allgemeine Lösung der Wellengleichung:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(\vec{r}, t) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t=0) &= \Psi_0(\vec{r}) \\ \dot{\Psi}(\vec{r}, t=0) &= v_0(\vec{r}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{Anfangsbedingungen}$$

Fourier-Transformation $\Psi(\vec{r}, t) \to \hat{\Psi}(\vec{k}, \omega)$:

$$\hat{\Psi}(\vec{k}, \omega) = \int \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \Psi(\vec{r}, t)$$

Rücktransformation:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}^3 k \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \hat{\Psi}(\vec{k}, \omega)$$

$$\Big[\underbrace{(-i\vec{k})^2}_{=-k^2} - \frac{1}{c^2}\underbrace{(-i\omega)^2}_{=-\omega^2}\Big]\hat{\Psi}(\vec{k},\omega) = 0$$

Es gilt also:

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{\Psi}(\vec{k},\omega) = 0$$

Falls $\omega \neq c|\vec{k}|$ ist also $\hat{\Psi}(\vec{k},\omega) = 0$:

$$\hat{\Psi}(\vec{k},\omega) = a_+(\vec{k})\delta(\omega + ck) + a_-(\vec{k})\delta(\omega - ck)$$

Eine Rücktransformation ergibt:

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}\omega\,\Big(a_+(\vec{k})\delta(\omega+ck) + a_-(\vec{k})\delta(\omega-ck)\Big)\,\mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\,\Big(a_+(\vec{k})\mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}+ckt)} + a_-(\vec{k})\mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}-ckt)}\Big) \qquad k = |\vec{k}|\end{aligned}$$

Wende die Anfangsbedingungen ($t_0 = 0$) an:

$$\begin{aligned}\Psi_0(\vec{r}) = \Psi(\vec{r},0) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}\Big(a_+(\vec{k}) + a_-(\vec{k})\Big)\\ v_0(\vec{r}) = \dot{\Psi}(\vec{r},0) &= \frac{ic}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\,k\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}\Big(a_+(\vec{k}) - a_-(\vec{k})\Big)\end{aligned}$$

Nach Fourier-Transformation :

$$\begin{aligned}a_+(\vec{k}) + a_-(\vec{k}) &= 2\pi\int \mathrm{d}^3r\,\mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{r}}\Psi_0(\vec{r})\\ a_+(\vec{k}) - a_-(\vec{k}) &= 2\pi\frac{1}{ick}\int \mathrm{d}^3r\,\mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{r}}v_0(\vec{r})\end{aligned}$$

Und damit:

$$a_\pm(\vec{k}) = \pi\int \mathrm{d}^3r\mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{r}}\left(\Psi_0(\vec{r}) \mp \frac{i}{ck}v_0(\vec{r})\right)$$

Dies wird wieder in den Ausdruck für $\Psi(\vec{r},t)$ eingesetzt,

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r},t) &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\int \mathrm{d}^3r'\mathrm{e}^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}\\ &\quad\cdot\left[\mathrm{e}^{ickt}\left(\Psi_0(\vec{r}') - \frac{i}{ck}v_0(\vec{r}')\right) + \mathrm{e}^{-ickt}\left(\Psi_0(\vec{r}') + \frac{i}{ck}v_0(\vec{r}')\right)\right]\\ &= \int \mathrm{d}^3r'\,\Big(\dot{D}(\vec{r}-\vec{r}')\Psi_0(\vec{r}) + D(\vec{r}-\vec{r}')v_0(\vec{r}')\Big)\end{aligned}$$

wobei $D(\vec{r},t)$, das die Green-Funktion der Wellengleichung ist, definiert wird als:

$$D(\vec{r},t) = \frac{-i}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\frac{1}{ck}\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}\left(\mathrm{e}^{ickt} - \mathrm{e}^{-ickt}\right)$$

Zur weiteren Betrachtung dieser Funktion wählen wir $\hat{z} \parallel \vec{r}$ und benutzen Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3k &= \int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi}_{=2\pi} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta \\
\vec{k}\vec{r} &= kr\cos\theta \\
x &= \cos\theta \\
\mathrm{d}x &= -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
\int_0^\pi ... &\to -\int_{-1}^1 ...
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(\vec{r},t) &= -\frac{i}{2(2\pi)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^2 \frac{1}{ck}\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{ikrx}\left(\mathrm{e}^{ickt} - \mathrm{e}^{-ickt}\right) \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^2 cr}\int_0^\infty \mathrm{d}k \left(\mathrm{e}^{ikr} - \mathrm{e}^{ikr}\right)\left(\mathrm{e}^{ickt} - \mathrm{e}^{-ickt}\right) \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^2 cr}\left\{ \int_0^\infty \mathrm{d}k \left(\mathrm{e}^{ik(r+ct)} - \mathrm{e}^{ik(r-ct)}\right)\right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}k \left(\mathrm{e}^{-ik(r+ct)} - \mathrm{e}^{-ik(r-ct)}\right)}_{=-\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}k\left(\mathrm{e}^{ik(r+ct)} - \mathrm{e}^{ik(r-ct)}\right)}\right\} \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^2 cr}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k \left(\mathrm{e}^{ik(r+ct)} - \mathrm{e}^{ik(r-ct)}\right)
\end{aligned}$$

Benutze nun:

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}k = 2\pi\delta(x)$$

Vereinfacht bleibt damit:

$$D(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi cr}\left[\delta(r-ct) - \delta(r+ct)\right]$$

Wir benutzen dies zur Lösung des Anfangswertproblems:

$$\Psi(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3r' \left(\dot{D}(\vec{r}-\vec{r}')\Psi_0(\vec{r}) + D(\vec{r}-\vec{r}')v_0(\vec{r}')\right)$$

Wegen $r \geq 0$, $c > 0$ wird die Green-Funktion zu:

$$D(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi cr}\begin{cases} \delta(r-ct) & ,t>0 \\ -\delta(r+ct) & ,t>0 \\ 0 & ,t=0 \end{cases}$$

$D(\vec{r},t)$ ist eine spezielle Lösung der Wellengleichung (t>0):

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)D(\vec{r},t) = \frac{1}{-4\pi c}4\pi\delta(\vec{r})\delta(r-ct) - \frac{1}{-4\pi cr}\underbrace{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\delta(r-ct)}_{=0}$$

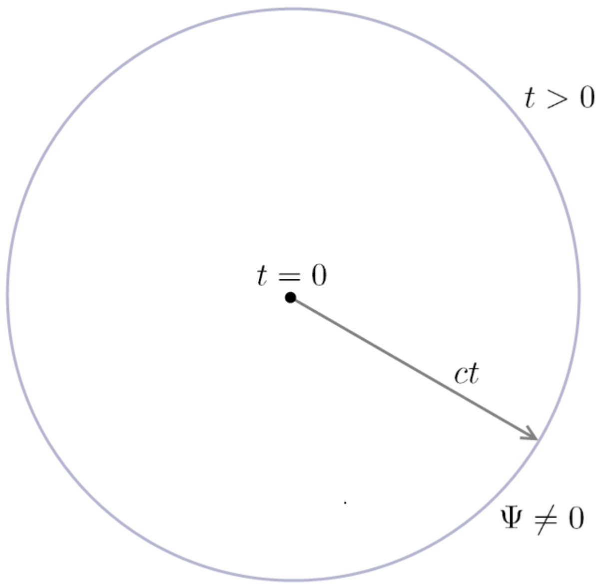
Daraus folgt für eine Punktquelle bei $\vec{r} = 0$, $t = 0$ unter Benutzung von $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) D(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c}\delta(\vec{r})\delta(t)$$

$D(\vec{r}, t)$ für $t > 0$ ($t < 0$) heißt retardierte (avancierte) Green-Funktion der Wellengleichung und beschreibt eine auslaufende (einlaufende) Welle mit Quelle bei $\vec{r} = 0$, $t = 0$.
Eine Lichtwelle, die im Punkt $\vec{r} = 0$ zur Zeit $t = 0$ erzeugt wurde, besitzt eine nicht-verschwindende Amplitude $\Psi \neq 0$.
Aus $r = ct$ für $t \geq 0$ und $r = -ct$ für $t < 0$ folgt das

Gesetz der Lichtausbreitung:

$$r^2 = c^2 t^2$$



Lösungen für die physikalischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$:

Betrachte ebene Wellen - die allgemeine Lösung kann als Überlagerung solcher ebener Wellen geschrieben werden.

$$\vec{A} = \vec{A}_0\, \mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

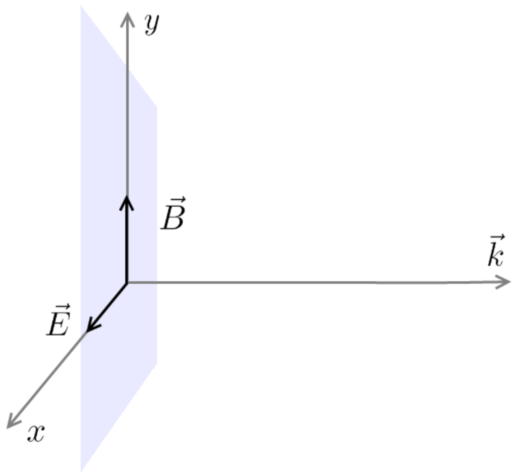
In der Coulomb-Eichung gilt: $\nabla\vec{A} = i\vec{k}\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \vec{A}, \vec{A}_0 \perp \vec{k}$ Die Felder sind:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\dot{\vec{A}} = i\omega\vec{A} = \underbrace{i\omega\vec{A}_0}_{=:\vec{E}_0}\, \mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = \underbrace{i\vec{k} \times \vec{A}_0}_{=:\vec{B}_0}\, \mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}
\end{aligned}$$

Bei der Betrachtung der tatsächlichen physikalische Felder wird nur der Realteil genommen.
Es ergeben sich mehrere **Folgerungen:**

$$\left.\begin{aligned}
\vec{k}\vec{E} = i\omega\vec{k}\vec{A} = 0 &\quad \Rightarrow \vec{E}, \vec{E}_0 \perp \vec{k} \\
\vec{k}\vec{B} = \vec{k}(i\vec{k} \times \vec{A}) = 0 &\quad \Rightarrow \vec{B}, \vec{B}_0 \perp \vec{k}
\end{aligned}\right\} \text{In Coulomb-Eichung sind die Felder } \textbf{transversal}.$$

$$\vec{E}\vec{B} = i\omega\vec{A}\cdot(i\vec{k}\times\vec{A}) = 0 \quad \Rightarrow \vec{E}\perp\vec{B}$$
$$\vec{E}\times\vec{B} = i\omega\vec{A}\times(i\vec{k}\times\vec{A}) = -\omega\vec{k}A^2 + \vec{A}(\underbrace{\vec{k}\vec{A}}_{=0}) = -\omega\vec{k}A^2 \quad \propto \vec{k}$$



Die Richtung von $\vec{E}$ kann in der Ebene senkrecht zu $\vec{k}$ beliebig gewählt werden und heißt Polarisation(-srichtung) der elektromagnetischen Welle.
Für festes $\vec{k}$, ω, $|\vec{E}_0|$, $|\vec{B}_0|$ gibt es also **zwei** linear unabhängige Lösungen der Wellengleichung.

Beispiel:
lineare Polarisation (x und y): $\hat{E}_0 = \hat{x}$, $\hat{E}_0 = \hat{y}$
zirkulare Polarisation (σ_+ und σ_-): $\hat{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{y})$

2 Spezielle Relativitätstheorie

2.1 Das Einsteinsche Relativitätsprinzip

Physik vor 1905:

1. Newtonsche Mechanik
2. Maxwellsche Elektrodynamik

Das

Newtonsche Gesetz:

$$\vec{F}(t) = m\ddot{\vec{r}}(t) \tag{2.1}$$

ist invariant unter der Galilei-Transformation :

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}\,' &= O\vec{r} + \vec{v}t + \vec{r}_0 \\ t\,' &= \lambda t + t_0 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Wobei $O^T O = OO^T = I$ und $\lambda = \pm 1$. O, λ, $\vec{v}$ und $\vec{r}_0$ sind zeitunabhängig.

$$\ddot{\vec{r}}\,' = O\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m} O\vec{F} = \frac{1}{m}\vec{F}\,' \quad \Rightarrow \vec{F}\,' = m\ddot{\vec{r}}\,'$$

Raumspiegelungen[1] und Zeitumkehr ($\lambda = -1$) sollen nicht erlaubt sein, $\det O = 1$. Damit sind die $O \in \mathrm{SO}(3)$ und stellen räumliche Drehungen dar.
Intertialsysteme sind also Koordinatensysteme, in denen das Newtonsche Gesetz gilt.

Bem.:

- Die Galilei-Transformation führt ein Inertialsystem in ein anderes Inertialsystem über.
- Die Existenz von Inertialsystemen ist eine empirische Tatsache.

Betrachte nur die Galilei-Transformation zwischen Inertialsystemen mit parallelen Achsen und gleichem Ursprung $0 = 0\,'$ bei $t = 0$, dann:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}\,' &= O\vec{r} + \vec{v}t \\ t\,' &= t \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Wichtig: Das Newtonsche Gesetz ändert unter Gl. 2.3 seine Form nicht.

Elektrodynamik:

[1] $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Gesetz der Lichtausbreitung:

$$r^2 = c^2 t^2 \tag{2.4}$$

Die Galilei-Transformation ist:

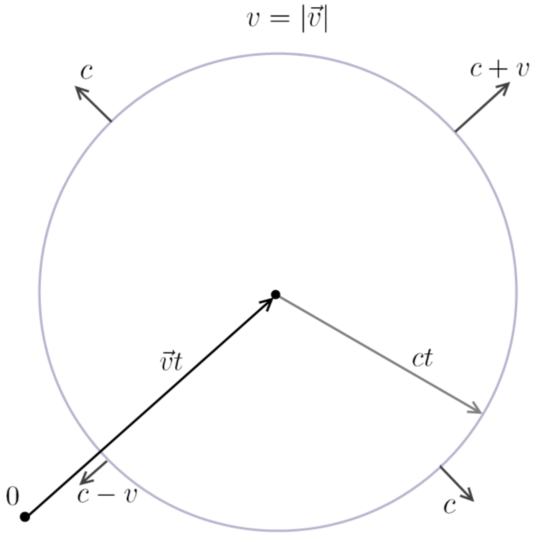
$$\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{v}t = \vec{r}\,' - \vec{v}t\,'$$

Das Gesetz der Lichtausbreitung wird zu:

$$c^2 t^2 = r^2 = (\vec{r}\,' - \vec{v}t\,')^2 = (r\,')^2 + v^2 t^2 - 2\vec{r}\,'\vec{v}t'$$

$$(r\,')^2 = c^2 (t\,')^2 - v^2 t^2 + 2\vec{r}\,'\vec{v}t'$$

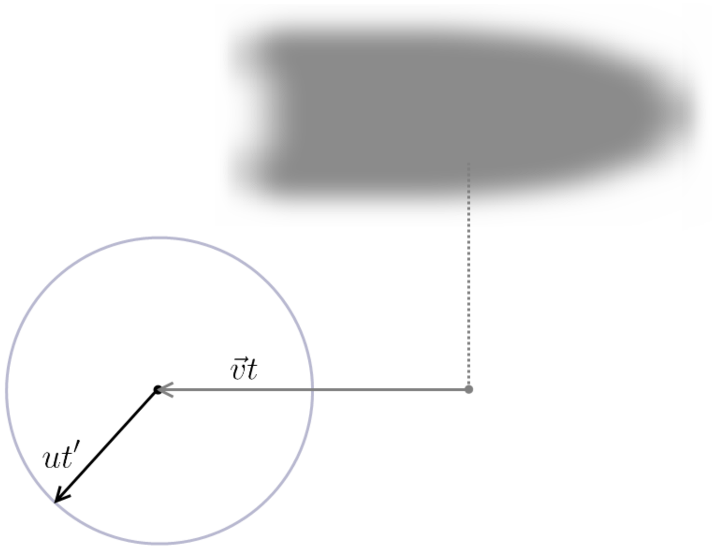
$$(\vec{r}\,' - \vec{v}t\,')^2 = c^2 (t\,')^2$$



Bem.:

- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts im neuen Koordinatensystem ist zum Teil > 0,
- sie hängt von der Richtung ab.

Die Gültigkeit von Gl. 2.1 und Gl. 2.4 zeichnet ein spezielles Inertialsystem aus, in dem sich Licht als Kugelwelle ausbreitet, also mit konstanter Lichtgeschwindigkeit in alle Richtungen. Dieses nennt man Äther.
Analogie: Werfe einen Stein aus einem fahrenden Boot ins Wasser.



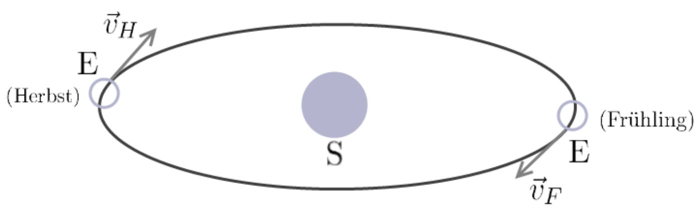
Das Ruhesystem des Wassers entspricht dem Äther.

Nun gibt es gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Ein solches absolutes Bezugssystem, der Äther, existiert.

2. Die physikalischen Gesetze (inkl. Maxwellgleichungen, Lichtausbreitung, klassische Mechanik) sind in allen Inertialsystemen gleich.
   Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant.
   Gl. 2.1 ist nicht gültig in dieser Form und die Galilei-Transformation nicht die korrekte Transformation.

   Diese Annahme stellte sich nach dem experimentellen Nachweis von Michelson & Morley (1887) als korrekt heraus. Es sollte eigentlich den Nachweis bringen, dass die Lichtgeschwindigkeit mit den Jahreszeiten, aufgrund unterschiedlicher Relativgeschwindigkeiten der Erde zum Äther, variierte.



Postulate der Speziellen Relativitätstheorie (Einstein 1905):

1. **Relativitätsprinzip**: Die physikalischen Gesetze lauten in allen Inertialsystemen gleich. (Äquivalent dazu: Es gibt keine Möglichkeit, absolute Geschwindigkeiten zu messen.)

2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Konsequenz: Die Galilei-Transformation muss aufgegeben werden.

2.2 Lorentz-Transformationen

Forderung nach dem Gesetz der Lichtausbreitung:

$$(r')^2 = c^2(t')^2$$

Die räumlichen Vektoren werden wie folgt definiert:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad , r^2 = \vec{r}\,\vec{r} = x^2 + y^2 + z^2$$

Es werden Vierervektoren verwendet:

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \qquad \text{„Ereignisse“, beachte: } ct =: x^0$$

Nach dem Gesetz der Lichtausbreitung gilt:

$$\begin{aligned} x^2 : &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\ &= c^2t^2 - r^2 = 0 \\ &= x \cdot x = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \overset{1}{=} x_\mu x^\mu \end{aligned}$$

[1] Einsteinsche Summenkonvention

$x_\mu := \left(ct, -x^1, -x^2, -x^3\right)$

Ansatz:

$$(x')^\nu = \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda^\nu{}_\mu \, x^\mu \Leftrightarrow x' = \Lambda x \qquad \Lambda\text{: 4x4-Matrix}$$

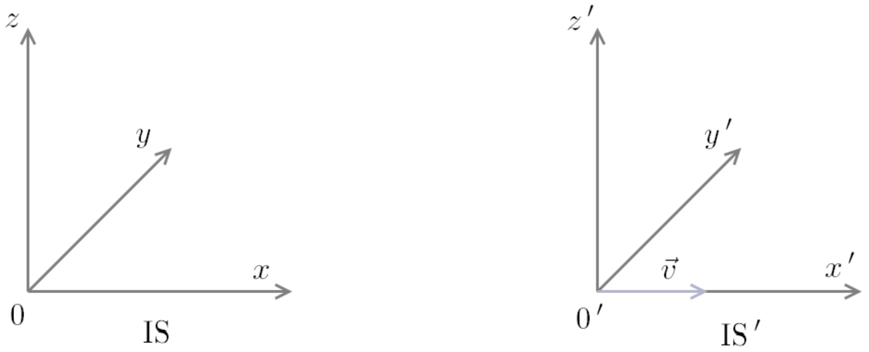
$$(x')^2 = (\Lambda x)^2 = (\Lambda x)^T g (\Lambda x)$$

Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}^4$:

$$(x')^2 = x^T \Lambda^T g \Lambda \, x = x^2 = x^T g \, x$$

Und damit:

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$



Betrachte nun zwei Inertialsysteme, die eine Relativgeschwindigkeit v in x-Richtung zueinenander haben, einen sog. „boost“:

$$\begin{aligned}
(x^0)' &= \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_1 x^1 \\
(x^1)' &= \Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 \\
(x^2)' &= x^2 \qquad (\Leftrightarrow y' = y) \\
(x^3)' &= x^3 \qquad (\Leftrightarrow z' = z)
\end{aligned}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
(x')^2 &= (\Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_1 x^1)^2 - (\Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\
&= x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
(x^0)^2: &\quad (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 = 1 \\
(x^1)^2: &\quad (\Lambda^0{}_1)^2 - (\Lambda^1{}_1)^2 = -1 \\
x_0 x_1: &\quad 2\Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_1 - 2\Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_1 = 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^1{}_0)^2 \geq 1$$

Man wählt den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}
\Lambda^0{}_0 &= \pm \cosh \chi \\
(\Lambda^0{}_0)^2 &= \cosh^2 \chi
\end{aligned}$$

1. Wähle +: $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ (sonst Zeitumkehr)

2. $$(\Lambda^1{}_0)^2 = (\Lambda^0{}_0)^2 - 1 = \cosh^2 \chi - 1 = \sinh^2 \chi \quad \Rightarrow \Lambda^1{}_0 = \pm \sinh \chi$$

   Wähle $-$ (sonst $\chi \rightarrow -\chi$)

3.
$$(\Lambda^1{}_1)^2 = 1 + (\Lambda^0{}_1)^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \Lambda^1{}_1 = \pm \cosh \tilde{\chi}$$
Wähle + (schließe Raumspiegelung aus, „eigentliche“ Lorentz-Transformation)

4.
$$\Rightarrow \Lambda^0{}_1 = \pm \sinh \tilde{\chi}$$
Mit (∗) folgt: Vorzeichen −, $\tilde{\chi} = \chi$
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi & 0 & 0 \\ -\sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bewegung der Koordinatenursprungs von IS$'$: $\vec{r}' = 0$, $\vec{r} = \vec{v}t = \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$0 = (x^1)' = -\sinh \chi \underbrace{x^0}_{=ct} + \cosh \chi \underbrace{x^1}_{=vt} \qquad (t \text{ kürzen})$$

Daraus folgt:

$$\frac{v}{c} = \tanh \chi =: \beta$$

Die Elemente von Λ sollen in Abhängigkeit von v und c ausgedrückt werden:

$$\frac{v^2}{c^2} = \tanh^2 \chi = \frac{\sinh^2 \chi}{\cosh^2 \chi} = \begin{cases} \dfrac{\cosh^2 \chi - 1}{\cosh^2 \chi} \\ \dfrac{\sinh^2 \chi}{1 + \sinh^2 \chi} \end{cases}$$

Auflösen:

$$\begin{aligned} \cosh \chi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =: \gamma \\ \sinh \chi &= \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Determinante gilt, wie bei einer Drehung:

$$\det \Lambda = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(\underbrace{1 - \beta^2}_{=\frac{1}{\gamma}^2}) = 1$$

Bei räumlichen Drehungen:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \vec{r}' &= O\vec{r} \quad \Rightarrow (\vec{r}')^2 = r^2 \\ (ct')^2 - (\vec{r}')^2 &= (ct)^2 - r^2 \end{aligned}$$

Explizite Darstellung der speziellen Lorentztansformation („boost“ in x-Richtung):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x\,' \\ y\,' \\ z\,' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct\,' \\ x\,' \\ y\,' \\ z\,' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} t\,' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \\ x\,' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y\,' &= y \\ z\,' &= z \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. $v \ll c$: $\beta \ll 1$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + ... \approx 1$:

$$\left.\begin{array}{l} x\,' = x - vt \\ t\,' = t \end{array}\right\}$$

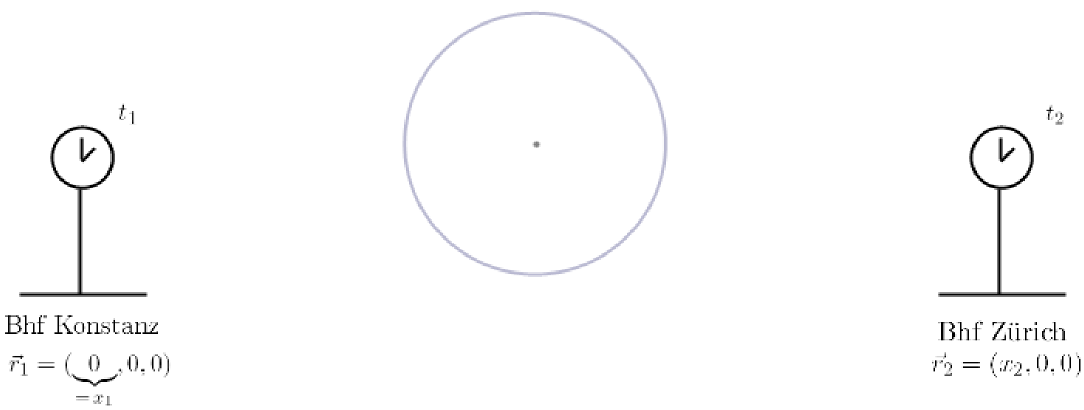
2. Falls $v > c$: $\beta > 1$, γ imaginär:
   $x\,'$, $t\,'$ imaginär, d. h. die Lorentz-Transformation existiert nicht. Es müssen $v < c$, $\beta < 1$ und $\gamma \geq 1$ gelten.

3. Inverse Lorentz-Transformation : $v \to -v$, $\beta \to -\beta$, $\gamma \to \gamma$

2.3 Physikalische Konsequenzen

1) Relativität der Gleichzeitigkeit

Galilei-Transformation : Finden Ereignisse im Inertialsystem IS gleichzeitig statt, so sind sie auch im System IS ' gleichzeitig.
Beispiel: zwei synchronisierte Uhren



Man stellt fest, dass zwei Ereignisse im Ruhesystem IS gleichzeitig sind, $t_1 = t_2$.
Das bewegte Inertialsystem sei ein Zug mit der Geschwindigkeit v.
Nach Lorentz-Transformation gilt:

$$
\begin{aligned}
{t_1}' &= \gamma(t_1 - \frac{\beta}{c}x_1) \\
{t_2}' &= \gamma(t_2 - \frac{\beta}{c}x_2) \\
\Delta t' = {t_2}' - {t_1}' &= \gamma\underbrace{(t_2 - t_1)}_{=0} - \gamma\frac{\beta}{c}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\neq 0}
\end{aligned}
$$

In bewegten Bezugssystemen sind die Ereignisse nicht gleichzeitig:

$$\Delta t' = \frac{\beta\gamma}{c}(x_1 - x_2) \neq 0$$

Beispiel (Kuypers, S. 378): Vorbeifahren eines Zuges an einem Bahnsteig (=IS)
Hier fehlen noch die Bilder.

- Die Punkte $\vec{r}_1$ $\vec{r}_2$ sind am Bahnsteig.
- Ein Beobachter ist in der Mitte des Bahnsteiges.
- Ein weiterer Beobachter befindet sich im Zug.
- Wenn beide Beobachter auf gleicher Höhe sind wird bei $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ jeweils ein Lichtblitz ausgelöst.
- Licht von $\vec{r}_1$ hat den Beobachter im Zug erreicht.
- Licht von beiden Quellen erreicht den Beobachter auf dem Bahnsteig (IS) gleichzeitig.
- Licht von $\vec{r}_1$ erreicht den Zug.

Fazit des Beobachters am Bahnsteig: Die Lichtblitze von $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ waren gleichzeitig ($t_1 = t_2$).
Für den Beobachter im Zug fanden waren sie jedoch nicht gleichzeitig $t_1 \neq t_2$.

2) Zeitdilatation: Zwei Ereignisse finden am selben Ort statt, aber zu verschiedenen Zeiten (z. B. Ablesen einer Uhr):
Im Ruhesystem (IS):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (ct_1, x, 0, 0) \\
x_2 &= (ct_2, x, 0, 0)
\end{aligned}
$$

Bewegtes System (IS '):

$$
\begin{aligned}
{t_1}' &= \gamma(t_1 - \frac{\beta}{c}x) \\
{t_2}' &= \gamma(t_2 - \frac{\beta}{c}x)
\end{aligned}
$$

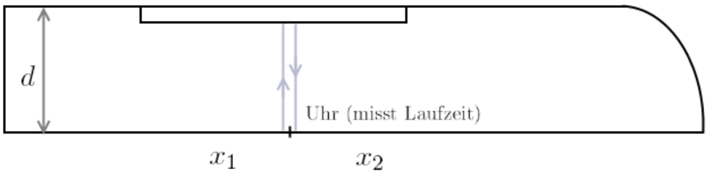
$$\Rightarrow \Delta t' = {t_2}' - {t_1}' = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma\Delta t > \Delta t$$

z. B. $v = \frac{c}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{4}{3} \approx 1.16$, die Uhr geht also 16 % langsamer. Wenn $v \neq 0$:

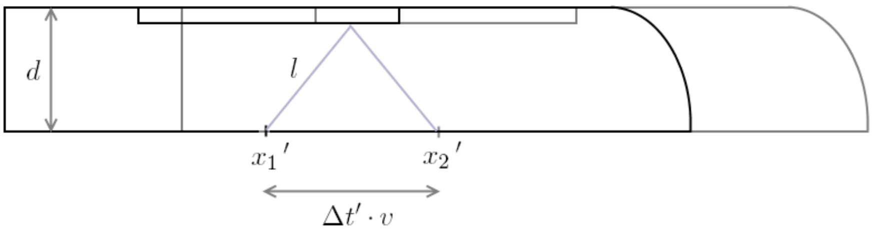
$$\Delta t' > \Delta t$$

Zeitspannen werden im bewegten System verlängert, oder: Bewegte Uhren gehen langsamer.

Beispiel (Kuypers): Spiegel im fahrenden Zug
Ruhessystem des Zuges (IS):

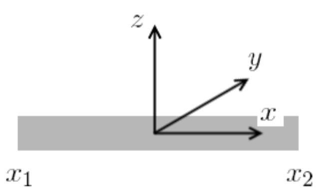


$\Delta t = \frac{2d}{c}$
Ruhesystem Bahnsteig (hier: bewegtes System, IS ')



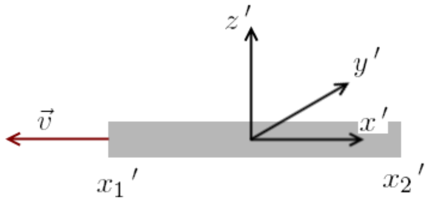
$$\begin{aligned} l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta t' v\right)^2} &= \frac{c\Delta t'}{2} \\ \Rightarrow \left(\frac{c^2}{4} - \frac{v^2}{4}\right)(\Delta t')^2 &= d^2 \\ \Rightarrow (1-\beta^2)(\Delta t')^2 &= (\Delta t)^2 \\ \Delta t' &= \gamma \Delta t \end{aligned}$$

$\Delta t'$: Benötige zwei synchronisierte Uhren.
Δt : Benötigen eine (ortsfeste) Uhr im IS: Δt heißt **Eigenzeit**.
3) Längenkontraktion: Zwei Ereignisse zur selben Zeit, aber an verschiedenen Orten.



(Inertialsystem/Ruhesystem)

$$\begin{aligned} x_1 &= (ct_1, x_1, 0, 0) \\ x_2 &= (ct_2, x_2, 0, 0) \\ l &= x_2 - x_1 \qquad\qquad (t_1 = t_2) \end{aligned}$$



(bewegtes System)

$$x_1' = \gamma(x_1 - \beta c t_1) \qquad t_1' = \gamma(t_1 - \frac{\beta}{c} x_1)$$
$$x_2' = \gamma(x_2 - \beta c t_2) \qquad t_2' = \gamma(t_2 - \frac{\beta}{c} x_2)$$

$$\begin{aligned} l' = x_2' - x_1' &= \gamma(x_2 - x_1) - \beta c(t_2 - t_1) \\ t_2' - t_1' &= \gamma(t_2 - t_1) - \frac{\gamma\beta}{c} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{=l} \end{aligned}$$

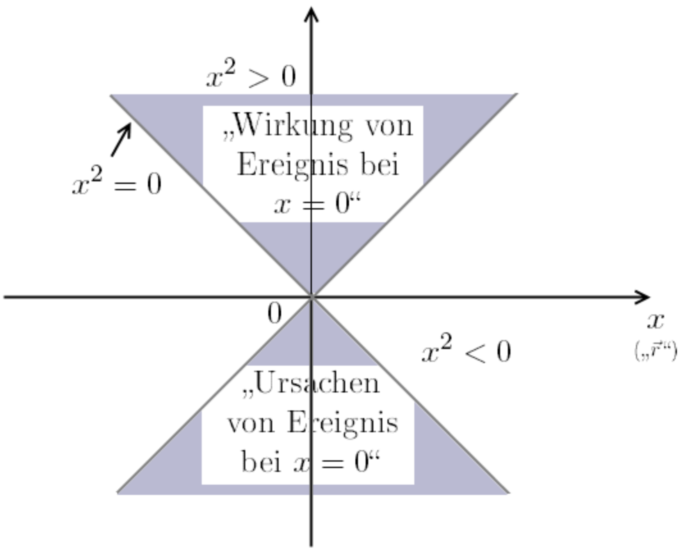
Länge messen in IS':

$$\begin{aligned} t_1' &= t_2' \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{\beta}{c} l \\ \Rightarrow l' &= \gamma l - \gamma \beta^2 l = \gamma \underbrace{(1 - \beta^2)}_{=\frac{1}{\gamma^2}} l = \frac{l}{\gamma} \end{aligned}$$

$$l' = \frac{l}{\gamma} < l$$

Bewegte Objekte erscheinen verkürzt (in Bewegungsrichtung).

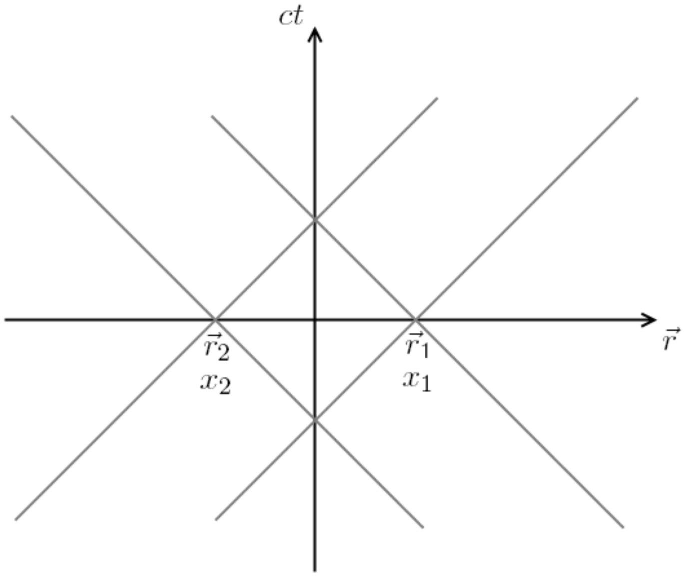
4) Kausalität: Ereignisse (Vierervektoren) $x = (ct, \vec{r})$ können im Minkowski-Diagramm dargestellt werden:



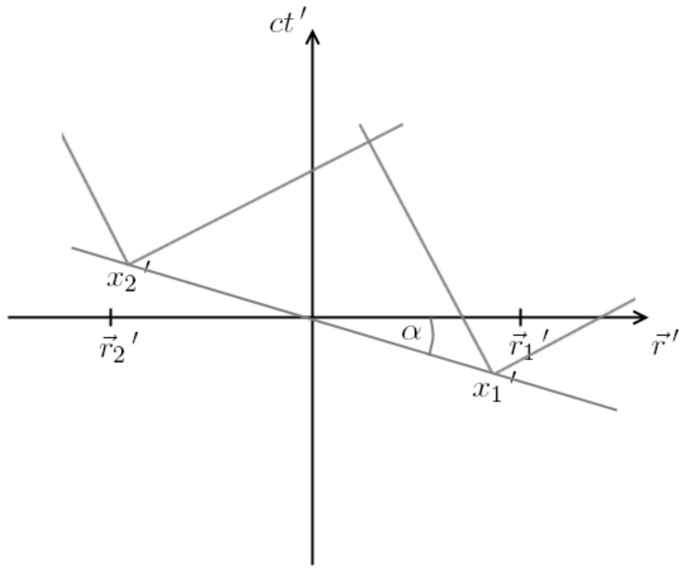
$x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 < c^2t^2:$ x ist ein zeitartiger Vierervektor: kausal abhängig
$x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = c^2t^2:$ x ist ein lichtiger Vierervektor: kausal abhängig (nur durch Licht,...)
$x^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 > c^2t^2:$ x ist ein raumartiger Vierervektor: kausal unabhängig

Nach Lorentz-Transformation gilt: $(x')^2 = x^2$, d. h. die Kausalität bleibt erhalten.

In Beispiel 1:



im IS':



$$\tan\alpha = \frac{-ct_1{}'}{x_1{}'} = -\frac{\gamma(ct_1 - \beta x_1)}{\gamma(x_1 - \beta ct_1)} = \frac{\beta x_1}{x_1} - \beta$$

$$\alpha = \arctan\beta < \frac{\pi}{4}$$

Bzw. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ für $v = c$.

2.4 Kovarianter vierdimensionaler Formalismus

Galilei-Transformation :

- Skalar (invariant unter Galilei-Transformation), z. B. Masse, Zeit, ...
- Vektor (transformieren sich wie Ortsvektoren), z. B. $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$
- Tensor

Lorentz-Transformation :

- Lorentz-Skalar ($\neq$ Galilei-Skalar), z. B. Zeit
- Vierervektor (zwei Arten)
- (Vierer-)Tensor (mehrere Arten)

1. Lorentz-Skalar: Größe, die sich unter Lorentz-Transformation nicht ändert, z. B.:
$$x^2 = c^2t^2 - r^2,\ m,\ c,\ ...$$
m ist hier die Ruhemasse.

2. kontravarianter Vierervektoren: a^μ
transformieren unter Lorentz-Transformation wie ein Orts-Vierervektor:
$$x = x^\mu = (ct, \vec{r})$$
$$a'^{\,\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$$
Beispiel: x^μ, $\mathrm{d}x^\mu$ oder p^μ (Viererimpuls)

3. kovariante Vierervektoren: a_μ:
„Herunterziehen“ des Index: $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$
mit
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Beispiel: $x_\mu = (ct, -\vec{r})$
„Heraufziehen“ des Index: $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$
Für den metrischen Tensor gilt: $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$
Lorentz-Transformation:
$$\begin{aligned} a_\mu{}' &= g_{\mu\nu} a^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\lambda a^\lambda \\ &= \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\lambda g^{\lambda\sigma}}_{=:\Lambda_\mu{}^\sigma} a_\sigma \end{aligned}$$
$$a_\mu{}' = \Lambda_\mu{}^\sigma a_\sigma$$

4. kontravarianter Tensor k-ter Stufe:
$$T'^{\,\mu_1\mu_2\ldots\mu_k} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1}\Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2}\ldots\Lambda^{\mu_k}{}_{\nu_k}T^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k}$$

5. kovarianter Tensor k-ter Stufe:
$$T'_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k} = \Lambda_{\mu_1}{}^{\nu_1}\Lambda_{\mu_2}{}^{\nu_2}\ldots\Lambda_{\mu_k}{}^{\nu_k}T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k}$$

6. gemischter Tensor (k-fach kontravariant, l-fach kovariant):
$$T'^{\,\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_k} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\sigma_1}\ldots\Lambda^{\mu_k}{}_{\sigma_k}\Lambda_{\nu_1}{}^{\varrho_1}\ldots\Lambda_{\nu_l}{}^{\varrho_l}T^{\sigma_1\ldots\sigma_k}{}_{\varrho_1\ldots\varrho_l}$$

7. Ableitung nach kontravariantem Vierervektor:
Funktion $f(x^\mu)$
IS $\xrightarrow{\Lambda}$ IS$'$: $f(x'^{\,\mu}) = f(x'^{\mu}(x^\mu))$
Kettenregel:
$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f}{\partial x'^{\,\nu}}\frac{\partial x'^{\,\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f}{\partial x'^{\,\nu}}\Lambda^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\frac{\partial f}{\partial x'^{\,\nu}}$$
$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu\frac{\partial}{\partial x'^{\,\nu}}$$
Ableitung nach einem kontravarianten Vierervektor x^μ transformiert sich wie ein kovarianter Vektor. Deshalb schreibe:
$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} := (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla);\ \ \frac{\partial}{\partial x_\mu} := (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$$

8.
$$\partial_\mu\,\partial^\mu = \partial^\mu\,\partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = -\Box$$
Der d'Alembert-Operator ist ein Lorentz-Skalar, d. h. ändert sich unter Lorentz-Transformation nicht.

9. Tensorprodukt: erhöhe Stufe
z. B. $a^\nu b_\mu =: T^\nu{}_\mu$ allgemein:
$$R^{\nu_1\ldots\nu_k}{}_{\mu_1\ldots\mu_l}S^{\nu_{k+1}\ldots\nu_{k+k'}}{}_{\mu_{l+1}\ldots\mu_{l+l'}} =: T^{\nu_1\ldots\nu_{k+k'}}{}_{\mu_1\ldots\mu_{l+l'}}$$

10. Skalarprodukt:
$a_\nu b^\nu$ ist ein Lorentz-Skalar:
$$a'_\nu b'^\nu = \Lambda_\nu{}^\mu a_\mu\Lambda^\nu{}_\varrho b^\varrho = \Lambda^\nu_\varrho\Lambda_\nu{}^\mu a_\mu b^\varrho = a_\mu b^\mu$$
Wobei gilt:
$$\Lambda^\nu{}_\varrho\Lambda_\nu{}^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}x'^\nu}\frac{\mathrm{d}x'^\nu}{\mathrm{d}x^\varrho} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}x^\varrho} = \delta^\mu{}_\varrho = \begin{cases} 0 & \mu\neq\varrho \\ 1 & \mu=\varrho\end{cases}$$

11. Verjüngung von Tensoren (Kontraktion):
$$T^{\nu_1\ldots\sigma\ldots\nu_k}{}_{\mu_1\ldots\sigma\ldots\mu_l} = \tilde{T}^{\nu_1\ldots\nu_{k-1}}{}_{\mu_1\ldots\mu_{l-1}}$$

2.5 Klassische Mechanik in kovarianter Form

Das Ziel ist eine unter Lorentz-Transformation forminvariante („kovariante“) Formulierung der klassischen Mechanik.

Beispiel: $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$
Das Problem besteht darin, dass $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (ct, \dot{\vec{r}})$ kein Vierervektor ist, da die Zeit kein Lorentz-Skalar ist. Abhilfe: Verwende die Eigenzeit τ zur Parametrisierung der Dynamik. (τ ist ein Lorentz-Skalar.)

Benutze $x^2 = x_\mu x^\mu$, ebenfalls ein Lorentz-Skalar, und damit auch $\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$.
Definition:

$$\mathrm{d}\tau^2 = \frac{\mathrm{d}x^2}{c^2} = \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$$

Physikalische Bedeutung:
im mitbewegten IS:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$$

$$\mathrm{d}x = (c\,\mathrm{d}t, \vec{0}),\ \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t,\ \tau = t$$

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma^2}\mathrm{d}t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \gamma\tau$$

Vierer-Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(c\gamma\tau, \vec{r}) = (c\gamma, \gamma\vec{v}) \\ &= \gamma(c, \vec{v}) \end{aligned}$$

Länge der Vierer-Geschwindigkeit:

$$u^2 = u_\mu u^\mu = \gamma(c^2 - v^2) = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

Leite die Vierer-Geschwindigkeit nochmals nach τ ab und erhalte die

Minkowski-Kraft:

$$m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} =: K^\mu$$

Im nicht relativistischen Limes ($\gamma \to 1$):

$$K^\mu \to (0, \vec{F})$$

$\vec{F}$ ist die Kraft für $v \ll c$ und es gilt: $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}$
Mit $i = 1, 2, 3$ gilt:

$$K_i = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\gamma v_i = m\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma v_i$$

Damit:

$$p_i = m\gamma v_i, \quad K_i = \gamma F_i$$

Für die Nullkomponente:

$$m \underbrace{u_\mu \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}}_{=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underbrace{u_\mu u^\mu}_{=c^2}=0} = u_\mu K^\mu = \gamma c K^0 - \gamma^2 \vec{v} \cdot \vec{F}$$

Es folgt:

$$K^0 = \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}$$

$$K^\mu = \gamma \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right)$$

Der Vierer-Impuls:

$$p^\mu = m u^\mu = m\gamma(c, \vec{v})$$

Es gilt also:

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = K^\mu$$

Die Nullkomponente der Vierer-Impulses:

$$cp^0 = m\gamma c^2 = m\gamma c^2 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nach Taylor entwickeln:

$$\begin{aligned} cp^0 &= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + ... \right) \\ &= \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2}}_{\text{relativistische Korrekturen}} + ... \end{aligned}$$

Damit (E sei die Energie):

$$p^0 = \frac{E}{c}$$

Die Länge des Vierer-Impulses:

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2\gamma^2 c^2 - m^2 \gamma^2 v^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = m^2 c^2$$

und ($\vec{p} = \gamma m v$):

$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2$$

Es folgt:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}$$

Für ein Teilchen in Ruhe ($\vec{p} = 0$):

$$E = mc^2$$

Vierer-Drehimpuls:
nicht-relativistisch:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (\vec{p} = m\vec{v})$$

relativistisch:

$$L^{\mu\nu} = \underbrace{x^\mu}_{=(ct,\vec{r})} p^\nu - x^\nu \underbrace{p^\mu}_{=m\gamma(c,\vec{v})} \qquad (\vec{p} = m\gamma\vec{v})$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -L_{10} & -L_{20} & -L_{30} \\ L_{10} & 0 & L_3 & -L_2 \\ L_{20} & -L_3 & 0 & L_1 \\ L_{30} & L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = (L_1, L_2, L_3) = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L_0 = (L_{10}, L_{20}, L_{30}) = \vec{r}p^0 - x^0\vec{p} = c(m\gamma\vec{r} - t\vec{p})$$

Drehmoment:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L^{\mu\nu}}{\mathrm{d}\tau} &= m\left(u^\mu u^\nu + x^\mu \frac{K^\nu}{m} - u^\nu u^\mu - x^\nu \frac{K^\mu}{m}\right) \\ &= x^\mu K^\nu - x^\nu K^\mu =: M^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\vec{L}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(\vec{r} \times \vec{F}) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(Newton)}$$

Erhaltungssätze (für ein Teilchen):
Bei Kräftefreiheit ($\vec{F} = 0,\ K^\mu = 0$) gilt im IS:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= & m\gamma\vec{v} &= \text{const.} & &\text{(Impuls)} \\ E &= & cp^0 &= \text{const.} & &\text{(Energie)} \\ \vec{L} &= & m\gamma(\vec{r} \times \vec{v}) &= \text{const.} & &\text{(Drehimpuls)} \\ \text{zusätzl.:} \quad \vec{L}_0 &= & \vec{r}\frac{E}{c} - t\,\vec{p} &= \text{const.} & &\underbrace{\text{(rel. Schwerpunkt)}}_{\neq \text{ Impulserhaltung}} \end{aligned}$$

2.6 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Empirische Tatsache: Die elektrische Ladung q ist ein Lorentz-Skalar.
Ladungsdichte: ϱ
Stromdichte: $\varrho\vec{v}$
Kontinuitätsgleichung: $\dot{\varrho} + \nabla\vec{j} = 0$

Ein Volumen V_0 verringert sich durch Lorentz-Kontraktion:

$$V = \frac{V_0}{\gamma}$$

Dies wirkt sich auf die Ladungsdichte aus:

$$\varrho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} = \gamma \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V_0} = \gamma \varrho_0$$

ϱ_0 ist ein Lorentz-Skalar.
Vierer-Stromdichte:

$$\begin{aligned} j^\mu &= (c\varrho, \vec{v}\varrho) \\ &= \gamma\varrho_0(c, \vec{v}) \\ &= \varrho_0 u^\mu \end{aligned}$$

Die Kontinuitätsgleichung lässt sich dann schreiben als:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Wellengleichungen:
Verwende den d'Alembert-Operator: $\square = -\partial_\mu \partial^\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\square\Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

Damit:

$$\frac{1}{c}\square\Phi = -\mu_0 c\varrho$$

$$\square\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

$$\square A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

Das Vierer-Vektorpotential ist: $A^\mu = \left(\frac{1}{c}\Phi, \vec{A}\right)$
Die Coulomb-Eichung $\nabla\vec{A} = 0$ ist nicht Lorentz-invariant, stattdessen verwendet man die unter Lorentz-Transformation invariante Lorentz-Eichung:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

explizit:

$$\nabla\vec{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0$$

Für die physikalischen Felder gilt: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Leftrightarrow B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y$ (zyklisch)
Man definiert den Feldstärketensor:

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Dieser ist antisymmetrisch: $F^{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$, insb. ist $F^{\mu\mu} = 0$.
explizit:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lassen sich so schreiben als:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \vec{B} = 0,\ \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

Wir definieren einen dualen Feldstärketensor:

$$\overline{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \begin{cases} +1 & \text{falls } \mu\nu\varrho\sigma = 0123 \text{ oder zyklisch} \\ -1 & \text{falls } \mu\nu\varrho\sigma = 3210 \text{ oder zyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{F}^{\mu\nu}$ geht aus $F_{\mu\nu}$ durch Vertauschen von $\vec{B}$ und $-\frac{\vec{E}}{c}$ hervor.

Man findet somit für die **Maxwellgleichungen**:

inhomogene:	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$
homogene:	$\partial_\mu \overline{F}^{\mu\nu} = 0$

Invarianten des elektromagnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2\left(B^2 - \frac{1}{c^2}E^2\right) \\ F_{\mu\nu}\overline{F}^{\mu\nu} &= -\frac{4}{c}\vec{E}\vec{B} \end{aligned}$$

Lorentz-Transformation:

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\varrho F^{\sigma\varrho}$$

z. B.

$$B_x{}' = \gamma\left(B_x + \frac{\beta}{c}E_y\right); \qquad E_x{}' = \gamma(E_x - \beta c B_y)$$

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Minkowski-Kraft:

$$K^\mu = \gamma \left(\frac{\vec{F}\vec{v}}{c}, \vec{F} \right) = \gamma q \left(\frac{\vec{E}\vec{v}}{c}, \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) = ... = q F^{\mu\nu} u_\nu$$

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0} B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (E^2 + c^2 B^2)$$

Dies ist die 00-Komponente eines Tensors zweiter Stufe, dem Energie-Impuls-Tensor:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(g_{\nu\kappa} F^{\mu\kappa} F^{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} F_{\nu\kappa} F^{\nu\kappa} \right)$$

$$T^{00} = u$$

$$T^{0j} = T^{j0} = -\frac{1}{c\mu_0} (\vec{B} \times \vec{E})^j \qquad \text{Poynting-Vektor}$$

T^{ij}: Maxwellscher Spannungstensor (Druck des elektromagnetischen Feldes)

$$\partial_\lambda T^{\mu\lambda} = 0$$

Analytische Mechanik

- Es geht um eine neue Formulierung der klassischen Mechanik, nicht um neue physikalische Gesetze.
- Führe die bekannten Gesetze (Newton) auf möglichst einfache und praktische Prinzipien (Axiome) zurück.
- Diese Prinzipien sind nicht beweisbar,
- können aber auf bekannte Gesetze zurückgeführt werden.

Weshalb tut man dies?

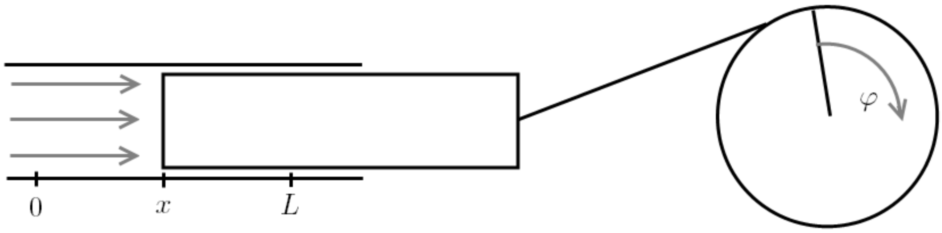
- Die Lösung eines Problems wird oft einfacher oder systematischer.
- Nicht nur Formulierungen der Mechanik, sondern auch anderer Theorien sind möglich: Elektromagnetismus, Grundlage der Quantenmechanik

3 Lagrange-Formalismus

Motivation: Systeme mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit (Zwangsbedingungen)

3.1 Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten

Beispiel (Nolting): Kolbenmaschine



1. Aufteilung in Massenpunkte (Diskretisierung) und 2. Newtonsches Gesetz

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij} \qquad (i = 1, ..., N) \tag{3.1}$$

Der erste Term sind die äußeren Kräfte, die in der Summe stehenden Terme sind jeweils die vom Teilchen j auf die Teilchen i ausgeübten Kräfte.
→ Es gibt also $3N$ gekoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung.
Probleme:
   - Diskretisierung, denn N ist sehr groß
   - Die Anfangsbedingungen sind in der Regel unbekannt.
   - Die F_{ij} sind oft unbekannt.
   - Die Bewegung ist eingeschränkt durch **Zwangskräfte**, die typischerweise unbekannt sind.

2. Beschreibe $M \ll N$ bewegliche feste Teile als starre Körper (hier $M = 3$: Kolben, Rad, Pleuel).
Die inneren Kräfte sind so groß (Zwangskräfte), dass feste „geometrische Beziehungen" gelten (z. B. Abstand der Befestigung der Pleuelstange am Rad vom Radmittelpunkt); hiermit vermeidet man die direkte Beschreibung der Zwangskräfte.
→ Es gibt „nur noch" $6M$ Freiheitsgrade und ebensoviele gekoppelte Differentialgleichungen.

3. Identifiziere *alle* Zwangsbedingungen (geometrische und kinematische) und die verbleibenden Freiheitsgrade. (Dies führt zu verallgemeinerten Koordinaten.)
hier: Es gibt einen Freiheitsgrad: Entweder den Winkel φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) oder die Kolbenstellung x ($0 \leq x \leq L$)
→ Eine Differentialgleichung 2. Ordnung für φ oder x und die Zwangskräfte kommen nicht mehr vor.

Begriffe:

1. **Zwangskräfte:**
   - schränken freie Bewegung ein
   - sind oft unbekannt
   - Lösung des Problems unter Berücksichtigung der Zwangskräfte oft hoffnungslos
2. **Zwangsbedingungen:**
   - durch Zwangskräfte hervorgerufene geometrische Einschränkungen der Bewegung
   - oft leicht zu beschreiben
3. Die Teilchenkoordinaten $\vec{r}_i$ sind nicht unabhängig voneinander. Ersetze $\{\vec{r}_i\}$ durch unabhängige, **generalisierte (verallgemeinerte) Koordinaten** q_j.

Verschiedene Arten von Zwangsbedingungen:

a) holonome Zwangsbedingungen

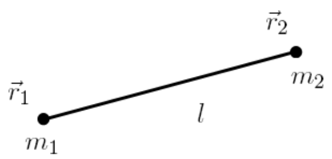
$$f_\nu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, ..., p) \tag{3.2}$$

1. **holonom-skleronome Zwangsbedingungen**

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, ..., p)$$

Beispiele:

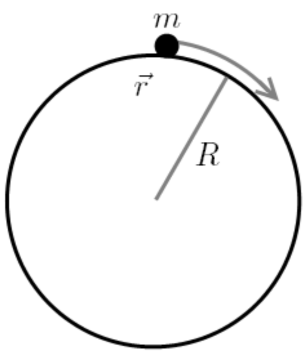
i) Hantel



$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$,
Zwangsbedingung: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2$
d. h. in Gl. 3.2 eingesetzt gilt: $p = 1$ und $f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - l^2$

ii) starrer Körper (Verallgemeinerung von i))
$f_{ij}(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0 \qquad (1 \leq i < j \leq N)$
c_{ij} ist eine feste Konstante.

iii) Teilchen auf Kugeloberfläche

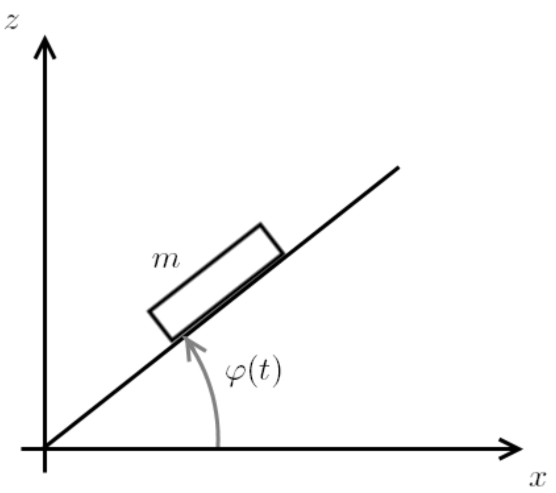


$$r^2 - R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

2. **holonom-rheonome Zwangsbedingungen**

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} \neq 0$$

Beispiel: Masse auf schiefer Ebene mit veränderlicher Steigung



Generalisierte Koordinaten

Holonome Zwangsbedingungen reduzieren die Anzahl der Freiheitsgrade:

$$S = 3N - p \tag{3.3}$$

Generalisierte Koordinaten: $q_1, q_2, ..., q_N$

Bedingungen:

i. Konfiguration des Systems ist eindeutig durch $q_1, ..., q_S$ festgelegt. D. h.:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, ..., q_S, t) \tag{3.4}$$

wobei die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt werden.

ii. Die q_j sind unabhängig voneinander, d. h. es gibt keine Beziehung der Form $F(q_1, q_2, ..., q_S, t) = 0$.

Bemerkung:

1. $q = (q_1, q_2, ..., q_S) \in K \subset \mathbb{R}^S$, K: Konfigurationsraum

2. Allgemein muss Gl. 3.4 nur lokal gelten, dann ist K eine S-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (wird hier nicht benötigt).

3. $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_S$: generalisierte Geschwindigkeiten

4. Bei bekannten Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} q_0 &= q(t_0) = (q_1(t_0), ..., q_S(t_0)) \\ \dot{q}_0 &= \dot{q}(t_0) = (\dot{q}_1(t_0), ..., \dot{q}_S(t_0)) \end{aligned}$$

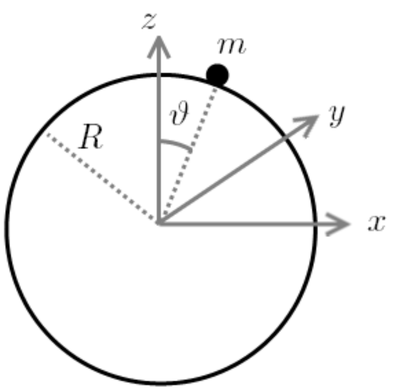
ist der Zustand des Systems (im Konfigurationsraum) für alle t berechenbar.

5. Die q_j können beliebige Dimension haben, nicht nur die der Länge.

6. Die Wahl der q_j ist nicht eindeutig, die Anzahl S ist jedoch eindeutig.

Beispiel:

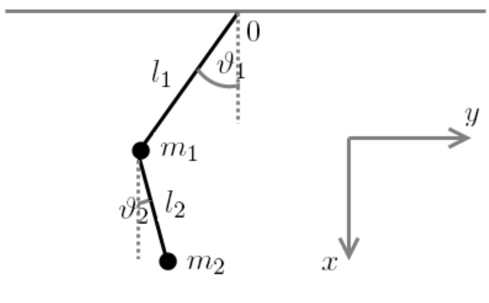
1. Teilchen auf Kugeloberfläche



$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$
$S = 3 - 1 = 2$
$q_1 = \vartheta$, $q_2 = \varphi$, d. h. generalisierte Koordinaten sind **Kugelkoordinaten**.

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin\vartheta \cos\varphi \\ y_1 &= R \sin\vartheta \sin\varphi \\ z_1 &= R \cos\vartheta \end{aligned}$$

2. ebenes Doppelpendel



$z_1 = z_2 = \text{const.}$
$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$
$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l_2^2 = 0$
$S = 6 - 4$
$q_1 = \vartheta_1$
$q_2 = \vartheta_2$
$x_1 = l_1 \cos\vartheta_1,\ y_1 = l_1 \sin\vartheta_1,\ z_1 = 0$
$x_2 = l_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \cos\vartheta_2,\ y_2 = l_1 \sin\vartheta_1 + l_2 \sin\vartheta_2,\ z_2 = 0$

3. Teilchen in Zentralpotential (keine Zwangsbedingungen):
   $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$
   $S = 3 - 0 = 3$, $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$, $q_3 = \varphi$

b) nicht-holonome Zwangsbedingungen
Dies sind alle Zwangsbedingungen, die nicht wie in Gl. 3.2 darstellbar sind.

1. Ungleichungen
   Beispiel: Teilchen in einer Schachtel
   $0 \leq r_i \leq L_i \qquad (i = 1, 2, 3)$, L_i: Kantenlängen

2. Zwangsbedingungen in differentieller, nicht integrabler Form
   Allgemeine Form:

$$(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N) = (x_1, x_2, ..., x_{2N})$$

$$\sum_{m=1}^{3N} f_{im} \mathrm{d}x_m + f_{it} \mathrm{d}t = 0 \qquad (i = 1, ..., p) \tag{3.5}$$

Wobei die linke Seite für kein i integrierbar ist.
Alternativ:

$$\sum_{m=1}^{3N} f_{im} \dot{x}_m + f_{it} = 0 \tag{3.6}$$

Die Nicht-Integrabilität der linken Seite ist äquivalent dazu, dass in Gl. 3.5 links kein totales Differential steht. Oder: Es gibt keine Funktion $F_i(x_1, ..., x_{3N}, t)$, sodass gilt:

$$f_{im} = \frac{\partial F_i}{\partial x_m}, \quad f_{it} = \frac{\partial F_i}{\partial t} \tag{3.7}$$

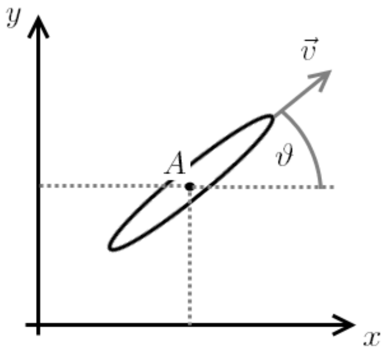
Denn dann wäre $\mathrm{d}F = 0$ mit der Folge:

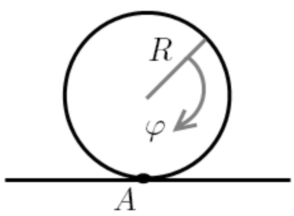
$$F_i(x_1, ..., x_{3N}, t) = \text{const.} \tag{3.8}$$

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass Gl. 3.5 nicht holonom ist:

$$\frac{\partial f_{im}}{\partial x_n} \neq \frac{\partial f_{in}}{\partial x_m} \tag{3.9}$$

Beispiel: Einrad





Annahme: Das Rad steht vertikal.
Die Bewegung wird dann beschrieben durch:

- Den momentanen Auflagepunkt A: $x, y(z=0) = \vec{r}(x,y,0)$
- Die Winkel φ, ϑ. Zwangsbedingung: Rollen (ohne Gleiten)

$$v = |\vec{v}| = |\dot{\vec{r}}| = R\dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x = v\cos\vartheta = R\dot{\varphi}\cos\vartheta \\ \dot{y} &= v_y = v\sin\vartheta = R\dot{\varphi}\sin\vartheta \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\underbrace{\dot{x}\sin\vartheta}_{=f_x} - \underbrace{\dot{y}\cos\vartheta}_{=f_y} = 0$$

bzw.

$$\mathrm{d}x\sin\vartheta - \mathrm{d}y\cos\vartheta = 0$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial\vartheta} = \cos\vartheta \neq \frac{\partial f_\vartheta}{\partial x} = 0$$

3.2 Das d'Alembertsche Prinzip

Das Ziel ist es, die Zwangskräfte zu eliminieren.

Definitionen:

1. virtuelle Verrückungen $\delta\vec{r}_i$
   - infinitesimale, virtuelle Koordinatenänderungen
   - mit den Zwangsbedingungen verträglich
   - werden momentan ausgeführt ($\delta t = 0$)

   Bemerkung: Der Unterschied besteht darin, dass $\delta\vec{r}_i$ nur virtuelle Verrückungen sind, während es sich bei $\mathrm{d}\vec{r}_i = 0$ um wirklich stattfindende Verrückungen handelt.

2. virtuelle Arbeit

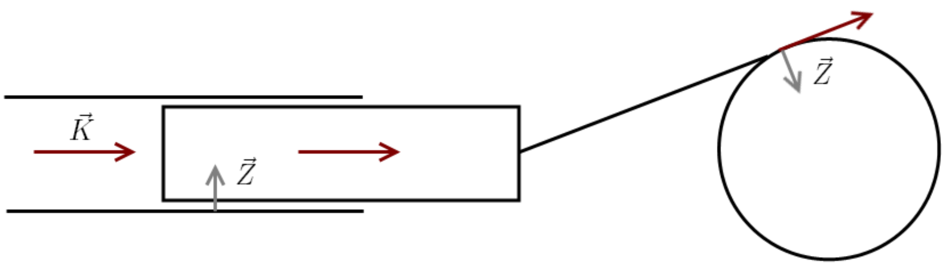
$$\delta W_i = -\vec{F}_i\delta\vec{r}_i \tag{3.10}$$

   wobei mit der treibenden Kraft K_i und der Zwangskraft Z_i

$$\vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i = m\ddot{\vec{r}}_i \tag{3.11}$$

   die gesamte auf das Teilchen wirkende Kraft ist.

Prinzip der virtuellen Arbeit



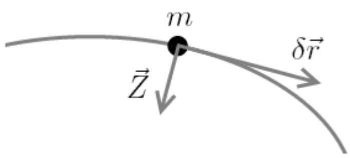
$$\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3.12}$$

Zwangskräfte leisten keine Arbeit. Mit Gl. 3.11 folgt mit $m\dot{\vec{r}}_i = \vec{p}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i$ das

d'Alembertsche Prinzip

$$\sum_i (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3.13}$$

Beispiel: Teilchen auf glatter Kurve ($N = 1$)



$$\vec{Z} \cdot \delta\vec{r} = 0$$

Bemerkungen:

1. Allgemein ($N > 1$) muss nur die Summe in Gl. 3.13 verschwinden, nicht jeder einzelne Summand.
2. Das primäre Ziel ist erreicht: Gl. 3.13 enthält die Zwangskräfte nmicht mehr.
3. Allerdings ist dies eine unhandliche Form, da die $\delta\vec{r}_i$ nicht unabhängig sind. Man macht daher einen Übergang auf generalisierte Koordinaten.

generalisierte Koordinaten

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_S, t) \qquad (i = 1, ..., N)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \equiv \dot{\vec{r}}_i(q_1, ..., q_S, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_S, t) \tag{3.14}$$

analog für virtuelle Verrückungen:

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_i(\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_S) \qquad (i = 1, ..., N)$$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{3.15}$$

Der erste Term in Gl. 3.13:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{S} K_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j =: \sum_{j=1}^{S} Q_j \delta q_j \tag{3.16}$$

mit dem **generalisierten Kraftkomponenten**:

$$\boxed{Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}} \tag{3.17}$$

Bemerkung: im Allgemeinen:

$$[Q_j] \neq [\text{Kraft}]$$
$$[Q_j q_j] = [\text{Energie}]$$

Für den zweiten Term: Benütze:

1.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_{l=1}^{S} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j\,\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j\,\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

2. aus Gl. 3.14:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i \dot{\vec{p}}_i\,\delta\vec{r}_i &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i \\
&\overset{(3.15)}{=} \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \\
&= \sum_{i,j} m_i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\vec{q}_j} - \dot{\vec{r}}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \\
&= \sum_{i,j} m_i \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}}_{=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\dot{\vec{r}}_i)^2} - \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}}_{=\frac{\partial}{\partial q_j}(\dot{\vec{r}}_i)^2}\Big)\delta q_j \\
\Big[T &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 \qquad \text{kinetische Energie}\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j
\end{aligned}$$

Unter Benutzung von Gl. 3.13 erhält man die Formulierung des d'Alembertschen Prinzips in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^{S}\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right] - Q_j\right\}\delta q_j = 0 \tag{3.20}$$

Spezialfall: konservative Systeme
Es existiert ein Potential $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N)$ unabhängig von $\dot{\vec{r}}_i$, sodass

$$\vec{K}_i = -\nabla_i V = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \tag{3.21}$$

Generalisierte Kraftkomponenten:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{3.22}$$

wobei

$$V(q_1, ..., q_S) = V(\vec{r}_1(q_1, ..., q_S), ..., \vec{r}_N(q_1, ..., q_S))\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Mit Gl. 3.20 folgt:

$$\sum_{j=1}^{3}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_j}\underbrace{(T-V)}_{=:L}-\frac{tp}{\partial q_j}(T-V)\right\}\delta q_j=0 \tag{3.23}$$

Definition: Lagrange-Funktion

$$L(q_1,...,q_S,\dot{q}_1,...,\dot{q}_S,t)=T(q_1,...,q_S,\dot{q}_1,...,\dot{q}_S,t)-V(q_1,...,q_S) \tag{3.24}$$

Lagrange-Funktion für holonome Zwangsbedingungen
Die δq_j sind unabhängig voneinander und damit jeder Summand in Gl. 3.20.
Das d'Alembertsche Prinzip für holonome Systeme lautet also:

$$\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right]-Q_j=0 \qquad (j=1,2,..,S)} \tag{3.25}$$

Konservative Systeme:

Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \tag{3.26}$$

Bemerkung:

1. auch Euler-Lagrange-Gleichungen genannt
2. Die Lagrange-Gleichungen sind äquivalent zu den Newtonschen Gleichungen.
3. Es handelt sich um S Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit für $q_j(t)$ Man benötigt also $2S$ Anfangsbedingungen:

$$q_1(0),...,q_S(0)$$
$$\dot{q}_1(0),...,\dot{q}_S(0)$$

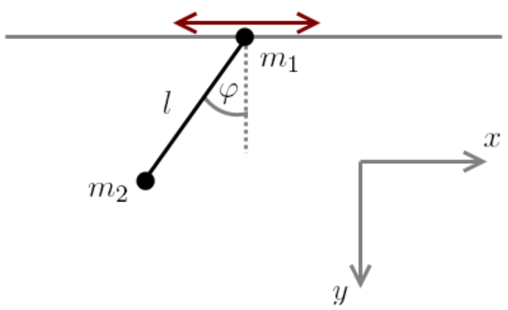
4. Lagrange-Gleichungen haben für beliebige $\{q_j\}$ dieselbe Form.
5. Verallgemeinerter Impuls:

$$\boxed{p_j:=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \tag{3.27}$$

6. $$\frac{\partial L}{\partial q_j}=0\Leftrightarrow p_j=\text{const.} \qquad \text{(Erhaltungssatz)} \tag{3.28}$$

   q_j ist zyklisch.

Beispiel (Nolting, S. 76): Schwingende Hantel



Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 = 0 \\ y_1 &= 0 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 &= l^2 \qquad \text{(holonom, skleronom)} \end{aligned}$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade S ist also: $S = 6 - 4 = 2$
Die generalisierten Koordinaten sind: $q_1 = x_1$, $q_2 = \varphi$
Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} &x_1 = q_1,\ y_1 = 0,\ z_1 = 0 \\ &x_2 = q_1 + l\sin\varphi,\ y_2 = l\sin\varphi,\ z_2 = 0 \\ &\dot{x}_1 = \dot{q}_1,\ \dot{y}_1 = 0, \dot{z}_1 = 0 \\ &\dot{x}_2 = \dot{q}_1 + l\dot{q}_2\cos q_2,\ y_2 = -l\dot{q}_2\sin q_2, \dot{z}_2 = 0 \end{aligned}$$

kinetische Energie und Potential:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2\right) \\ V &= -m_2 lg\cos q_2 \end{aligned}$$

q_1 ist zyklisch, d. h. kommt in der Lagrange-Funktion nicht vor:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)\dot{q}_1 + m_2 l\dot{q}_2\cos q_2 = \text{const.}$$

Physikalisch ist dies die x-Komponente des Impulses.
Löse nach $\dot{q}_1$ auf:

$$\dot{q}_1 = \underbrace{\frac{p_1}{m_1 + m_2}}_{=:c} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} l\, \underbrace{\dot{q}_2\cos q_2}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin q_2}$$

Integriere:

$$q_1 = ct - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sin q_2(t) + a$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= a = 0 \\ q_2(0) &= \varphi(0) = 0 \\ \dot{q}_1(0) &= \underbrace{c}_{=0} - \frac{m_2 l}{m_1 - m_2}\underbrace{\dot{q}_2(0)}_{=\omega_0}\underbrace{\cos q_2(0)}_{=1} \\ \dot{q}_2(0) &= \dot{\varphi}(0) =: \omega_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q_1(t) = -\frac{m_2 l}{m_1 + m - 2}\sin q_2(t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1(t) &= -\frac{m_1 l}{m_1 + m_2}\sin\varphi(t),\ \varphi_1(t) = 0 \\ x_2(t) &= \underbrace{\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)}_{=\frac{m_1}{m_1 + m_2}} l\sin\varphi(t),\ y_2(t) = l\cos\varphi(t) \end{aligned}$$

- $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ beschreibt eine periodische 1D-Schwingung.
- $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ beschreibt eine periodische 2D-Schwingung (Ellipse).

Bahnkurve:

$$\frac{x_2^2}{b^2} + \frac{y_2^2}{a^2} = 1$$

wobei $b := l\frac{m_1}{m_1+m_2} < l$ und $a := l$. Für $m_1 \to \infty$ gilt:

$$\begin{aligned} x_2^2 + y_2^2 &= l^2 \\ x_1 = y_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\to$ physikalisches Pendel

$\varphi(t)$ ist immer noch unbekannt. Betrachte also die Lagrange-Gleichung für $q_2 = \varphi$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m_2 l^2 \dot{q}_2 + m_2 l \dot{q}_1 \cos q_2 \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -m_2 l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 - m_2 g l \sin q_2 \\ &= -m_2 l \sin q_2 (\dot{q}_1 \dot{q}_2 + g) \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung:

$$m_2 l(l\ddot{q}_2 + \cos q_2 \ddot{q}_1 - \sin q_2 \dot{q}_2 \dot{q}_1) + m_2 l \sin q_2 (\dot{q}_1 \dot{q}_2 + g) = 0$$

Daraus folgt:

$$\boxed{l\ddot{q}_2 + \cos q_2 \ddot{q}_1 + g \sin q_2 = 0}$$

mit $q_1 = \frac{m_2 l}{m_1+m_2} \sin q_2$

- nicht-lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für $q_2(t) = \varphi(t)$
- Näherung $q_2 = \varphi \ll 1$

$$\begin{aligned} &\cos q_2 \approx 1, \ \sin q_2 \approx q_2 \\ &l\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 + g q_2 \approx 0 \\ &q_1 \approx -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} q_2 \\ &\underbrace{(l - \frac{m_2}{m_1 + m_2} l)}_{=l\frac{m_1}{m_1+m_2}} \ddot{q}_2 + g q_2 \approx 0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\boxed{\ddot{q}_2 + \underbrace{\frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}}_{=:\omega^2} q_2 \approx 0}$$

harmonischer Oszillator: lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung
Ansatz:

$$q_2 = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$q_2(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$
$$\dot{q}_2(0) = \omega_0 \Rightarrow B = \frac{\omega_0}{\omega}$$
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{m_1 + m_2}{m_1}}}$$
$$\boxed{\varphi(t) \approx \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t}$$

Verallgemeinerte Potentiale
bisher:

$$\begin{aligned} V &= V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N) && \text{unabhängig von } \dot{\vec{r}}_i,\ t \\ &= V(q_1, q_2, ..., q_S) && \text{unabhängig von } \dot{q}_j,\ t \end{aligned}$$

jetzt:

$$U = U(q_1, ..., q_S, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_S, t)$$

generalisierte Kräfte:

$$Q_j := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

verallgemeinerte Lagrange-Funktion:

$$L = T - U \tag{3.29}$$

Mit diesen Definitionen gilt die Lagrangegleichung (3.26) unverändert.

Beispiel: geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld
$(q_j = r_j,\ Q_j = F_j)$
Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = \tilde{q}(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) = \tilde{q}(-\nabla\varphi - \dot{\vec{A}} + \underbrace{\dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A})}_{=\nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - (\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{A}})$$

benütze:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{A} + \dot{\vec{A}})$$

damit:

$$\vec{F} = \tilde{q}(-\frac{\partial\varphi}{\partial \vec{r}} - \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{dt}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\dot{\vec{r}}\vec{A})) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Es folgt

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \tilde{q}(\varphi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}, t)) \tag{3.30}$$

und:

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \tilde{q}(\dot{\vec{r}}\vec{A}) = -\tilde{q}\varphi} \tag{3.31}$$

Eichtransformation:

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi$$
$$\varphi \to \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$$
$$L \to L + \tilde{q}(\underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \nabla\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}}_{=\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{dt}}}) \tag{3.32}$$

- L ist nicht eichinvariant (enthält Potentiale $\vec{A}$, φ).
- Die Lagrange-Gleichungen sollten eichinvariant sein (enthalten $\vec{E}$, $\vec{B}$).

Allgemeine Behauptung: Die Lagrange-Gleichungen sind invariant unter

$$L \to L + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

wobei $f(q_1, ..., q_S, t)$ eine beliebige (hinreichend oft) differenzierbare Funktion ist.
Beweis:

$$\begin{aligned}
&L \to L + L_0,\ L_0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{l=1}^{S} \frac{\partial f}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial f}{\partial t} \\
&\frac{\partial L_0}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j\,\partial t} + \sum_l \frac{\partial^2 f}{\partial q_j\,\partial q_l}\dot{q}_l \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_0}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}}_{=\frac{\partial f}{\partial q_j}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial L_0}{\partial q_j} \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_0}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, ..., S)
\end{aligned}$$

Lagrange-Funktion für nicht-holonome Zwangsbedingungen

p holonome Zwangsbedingungen
p' nicht-holonome Zwangsbedingungen

1. Reduktion auf $S = 3N - p$ Freiheitsgrade mittels generalisierter Koordinaten $q_1, ..., q_S$
2. Schreibe die nicht-holonomen Zwangsbedingungen

$$\sum_{m=1}^{3N} f_{im}(x_1, ..., x_{3N}, t)\mathrm{d}x_m + f_{it}(x_1, ..., x_{3N}, t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (i = 1, ..., p') \tag{3.33}$$

   um auf generalisierte Koordinaten:

$$\sum_{m=1}^{S} a_{im}\mathrm{d}q_m + b_{it}\mathrm{d}t = 0 \qquad (i = 1, ..., p') \tag{3.34}$$

3. Zwangsbedingungen für virtuelle Verrückungen:

$$\sum_{m=1}^{S} a_{im}\delta q_m = 0 \tag{3.35}$$

4. Führe p' Lagrange-Multiplikatoren λ_i $(i = 1, ..., p')$ ein:

$$\sum_{i=1}^{p'} \lambda_i \sum_{m=1}^{S} a_{im}\delta q_m = 0 \tag{3.36}$$

   (Die λ_i sind im Moment noch beliebig.)

5. konservatives System (Gl. 3.23):

$$\sum_{m=1}^{S}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_m}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial q_m}+\sum_{i=1}^{p'}\lambda_i a_{im}\right\}\delta q_m=0 \tag{3.37}$$

6. Die δq_m sind nicht unabhängig: Wähle die q_m $(m=1,...,S-p')$ unabhängig und q_m $(m=S-p'+1,...,S)$ abhängig. Bestimme die λ_i so, dass

$$\frac{\partial L}{\partial q_m}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}+\sum_{i=1}^{p'}\lambda_i a_{im}=0 \qquad (m=S-p'+1,...,S). \tag{3.38}$$

Einsetzen in Gl. 3.37:

$$\sum_{m=1}^{S-p'}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_m}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial q_m}+\sum_{i=1}^{p'}\lambda_i a_{im}\right\}\delta q_m=0$$

wegen Unabhängigkeit von δq_m $(m=1,...,S-p')$ folgt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_m}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial q_m}+\sum_{i=1}^{p'}\lambda_i a_{im}=0 \qquad (m=1,...,S-p')$$

Mit Gl. 3.38 folgen die

Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial q_m}-\frac{\partial L}{\partial q_m}=\sum_{i=1}^{p'}\lambda_i a_{im} \qquad (m=1,...,S) \tag{3.39}$$

Bemerkungen:

1. S Differentialgleichungen für $S+p'$ Variablen q_m, λ_i, man benötigt noch die Zwangsbedingungen:

$$\sum_{m=1}^{S}a_{im}\dot{q}_m+b_{it}=0 \qquad (i=1,...,p')$$

2. Physikalische Bedeutung der λ_i:
Vergleiche Gl. 3.25 für holonome Systeme:
generalisierte Zwangskräfte:

$$\overline{Q}_m=\sum_{i=1}^{p'}\lambda_i a_{im} \qquad (m=1,...,S) \tag{3.40}$$

Die Zwangsbedingungen (3.36):

$$\sum_{m=1}^{S}\overline{Q}_m\delta q_m=0 \tag{3.41}$$

Dies ist die Formulierung des d'Alembertschen Prinzips in generalisierten Koordinaten.

3. Man kann die Lagrange-Multiplikatoren auch für holonome Systeme anwenden:
   - Man erhält ein komplizierteres Differentialgleichungssystem,
   - aber dafür Informationen über die Zwangskräfte (wichtig in der technischen Mechanik).

Beispiel: Rad auf der Oberfläche

$$\begin{aligned} q_1 &= x \\ q_2 &= y \\ q_3 &= \varphi \\ q_4 &= \vartheta \end{aligned}$$

Rollen:

$$\begin{aligned} \dot{x} - R\cos\vartheta\dot{\varphi} &= 0 \quad \text{(i)} \\ \dot{y} - R\sin\vartheta\dot{\varphi} &= 0 \quad \text{(ii)} \qquad \text{p'=2} \end{aligned}$$

d. h. in Gl. 3.34:

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = -R\cos\vartheta,\ a_{14} = 0 \\ &a_{21} = 0,\ a_{22} = 1,\ a_{23} = -R\sin\vartheta,\ a_{24} = 0 \\ &b_{it} = 0 \end{aligned}$$

Es gibt zwei Lagrange-Multiplikatoren λ_1, λ_2. Die Zwangskräfte:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_1 &= \lambda_1 \\ \overline{Q}_2 &= \lambda_2 \\ \overline{Q}_3 &= -R\cos\vartheta\,\lambda_1 - R\sin\vartheta\,\lambda_2 \\ \overline{Q}_4 &= 0 \end{aligned}$$

Es gibt keine äußeren Kräfte: $V = 0$

$$L = T - V = T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\vartheta}^2$$

Lagrange-Gleichungen (1. Art):

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= \lambda_1 && \text{(iii)} \\ M\ddot{y} &= \lambda_2 && \text{(iv)} \\ J_1\ddot{\varphi} &= -R\cos\vartheta\,\lambda_1 - R\sin\vartheta\,\lambda_2 && \text{(v)} \\ J_2\ddot{\vartheta} &= 0 && \text{(vi)} \end{aligned}$$

(vi) $\Rightarrow \vartheta(t) = \omega t, \quad \omega = \text{const.}$
Differenzieren von (i) und (ii) nach der Zeit ergibt:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -R\omega\dot{\varphi}\sin\omega t + R\ddot{\varphi}\cos\omega t \\ \ddot{y} &= R\omega\dot{\varphi}\cos\omega t + R\ddot{\varphi}\sin\omega t \end{aligned}$$

Die Lagrange-Multiplikatoren mit (iii) und (iv):

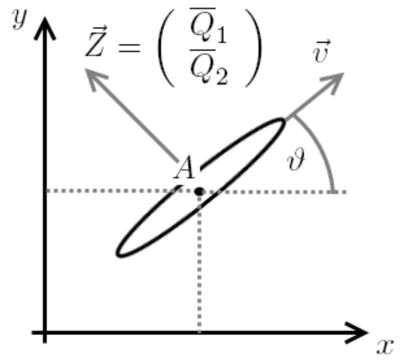
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -MR\omega\sin\omega t\,\dot{\varphi} + MR\cos\omega t\,\ddot{\varphi} \\ \lambda_2 &= MR\omega\cos\omega t\,\dot{\varphi} + MR\sin\omega t\,\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

In (v):

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\varphi} &= MR^2\omega\sin\omega t\cos\omega t\,\dot{\varphi} - MR^2\cos^2\omega t\,\ddot{\varphi} \\ &\quad -MR^2\omega\cos\omega t\sin\omega t\,\dot{\varphi} - MR^2\sin^2\omega t\,\ddot{\varphi} \\ &= -MR^2\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Damit ist $\ddot{\varphi} = 0$ und $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \text{const.}$.
Die Zwangskräfte:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_1 &= -MR\omega\dot{\varphi}_0\sin\omega t \\ \overline{Q}_2 &= MR\omega\dot{\varphi}_0\cos\omega t \\ \overline{Q}_3 &= \overline{Q}_4 = 0 \end{aligned}$$



Geradeaus fahren: $\omega = 0$, $\overline{Q}_{1,2} = 0$
Kurve fahren: $\omega \neq 0$

$$\begin{aligned} M\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= MR\omega\dot{\varphi}_0\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\dot{\varphi}_0\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} \\ \vec{A} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{R}{\omega}\dot{\varphi}_0\begin{pmatrix} \sin\omega t \\ -\cos\omega t \end{pmatrix} \qquad \text{Kreisbahn} \end{aligned}$$

3.3 Das Hamiltonsche Prinzip

Das bekannte d'Alembert-Prinzip ist ein Differentialprinzip. Nun gibt es mit dem Hamiltonschen Prinzip ein Integralprinzip.

Betrachte ein mechanisches System mit dem Konfigurationsraum K: Jeder Satz von generalisierten Koordinaten $q = (q_1, q_2, ..., q_S) \in K$ drückt den Zustand des Systems aus.
Die zeitliche Änderung des Zustands zwischen den Zeiten t_1 und t_2:

$$\begin{aligned} q: \quad & [t_1, t_2] \to K \\ & t \mapsto q(t) \end{aligned}$$

$q(t)$ heißt **Bahn** (oder: Bahnkurve, Konfigurationsbahn, Trajektorie).

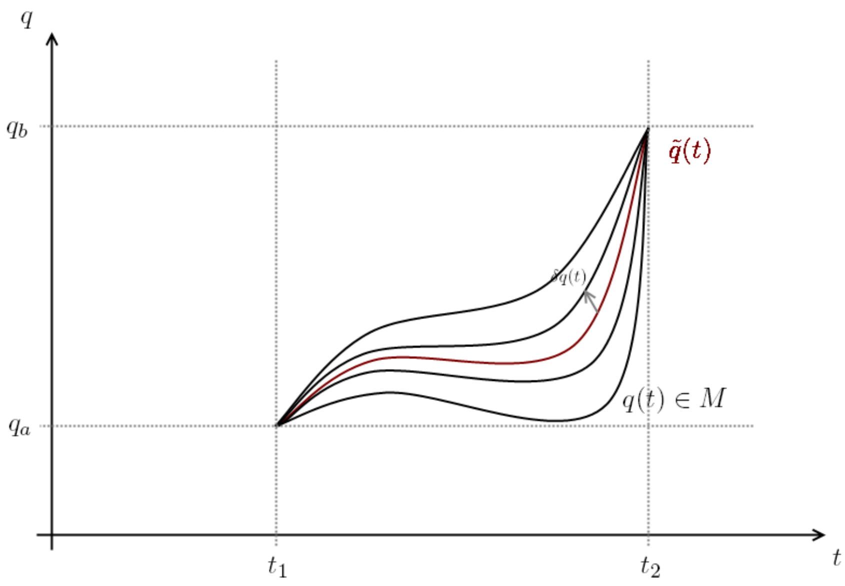
Die tatsächliche mechanische Bahn sei nun $\tilde{q}(t)$. Führe virtuelle Verrückungen $\delta q(t)$ durch: Es ergibt sich die varrierte Bahn:

$$q(t) = \tilde{q}(t) + \delta q(t)$$

Wobei $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, sodass $q(t_1) = q_a$, $q(t_2) = q_b$ für alle $q(t)$.

Definition: Konkurrenzschar (Variationsschar)

$$M = \{q : [t_1, t_2] \to K \mid q(t_1) = q_a,\ q(t_2) = q_b,\ q \text{ zweimal differenzierbar}\} \tag{3.42}$$



Betrachte holonomes, konservatives System:
$\to$ Lagrangefunktion: $L = T - V$
Für jede Bahn $q \in M$ ist L zu jeder Zeit definiert.

$$L(q(t), \dot{q}(t), t) =: f_q(t)$$

Definition: Wirkung

$$S[q(t)] := \int_{t_1}^{t_2} L(q_t, \dot{q}(t), t)\mathrm{d}t \tag{3.43}$$

Die Wirkung ist eine Abbildung:

$$S : \quad \begin{aligned} M &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto S(q) = S[q(t)] \end{aligned}$$

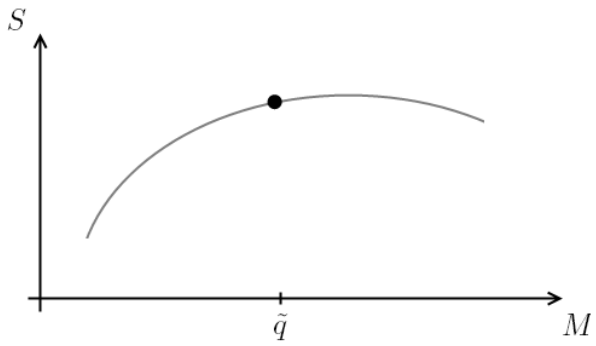
$\to$ **Wirkungsfunktional**

Hamiltonsches Prinzip: Die tatsächliche mechanische Bahn $\tilde{q}(t)$ erfolgt so, dass das Wirkungsfunktional S stationär (extremal) wird:

$$S[\tilde{q}(t) + \delta q(t)] = S[q(t)] \tag{3.44}$$

für beliebige **infintesimale** viruelle Verrückungen $\delta q(t)$.
Bemerkungen:

1.



2. wäre S eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), dann könnte Gl. 3.44 als Ableitung geschrieben werden:

$$f(x + \mathrm{d}x) = f(x) + \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f(x) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$$

3. Hier ist $S: \ M \to \mathbb{R}$ ein **Funktional**. Man definiert die **Variationsableitung** analog zur Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Ableitung einer Funktion $x \mapsto f(x)$(eine Variable)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

umgekehrt: Taylorreihe:

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Ableitung einer Funktion: $(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + \varepsilon, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\varepsilon}$$

Variationsableitung eines Funktionals $q(t) \mapsto S[q(t)]$

$$\frac{\delta S}{\delta q(t')} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S[q(t) + \varepsilon\delta(t-t')] - S[q(t)]}{\varepsilon} \tag{3.45}$$

„Taylor-Entwicklung“

$$S[\tilde{q}(t) + \delta q(t)] = S[\tilde{q}(t)] + \frac{\delta S}{\delta q(t)}\delta q(t)$$

Totale Ableitung:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}f &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \end{aligned} \tag{3.46}$$

Hamiltonsches Prinzip:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0 \tag{3.47}$$

für die mechanische Bahn q(t).

Äquivalenz zum d'Alembertschen Prinzip:
(i) d'Alembert $\Rightarrow$ Hamilton

$$\sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{K}_i}_{=\vec{Z}_i} \Big) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Benütze:

$$\ddot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i$$

Integriere:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{K}_i \right) \delta\vec{r}_i \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i) - \frac{m_i}{2} \delta(\dot{\vec{r}}_i^2) - \vec{K}_i \delta\vec{r}_i \right] \mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left[\delta \left(\frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right) + \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i \right] \mathrm{d}t \end{aligned}$$

wegen $\delta\vec{r}_i(t_{1,2}) = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \underbrace{\delta q_j(t_{1,2})}_{=0} = 0$

kinetische Energie:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2$$

Kräfte (konservatives System):

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{S} Q_j \delta q_j = -\sum_{j=1}^{S} \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j = -\delta V$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, \mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \, \mathrm{d}t = \delta S$$

(ii) Hamilton $\Rightarrow$ d'Alembert
Benütze, dass $L(t): \; q \mapsto L(q(t), \dot{q}(t), t)$ ein spezielles Funktional ist, da es nur von q und $\dot{q}$ zur Zeit t abhängt, und nicht von der ganzen Funktion $q(t)$. $\frac{\delta L}{\delta q}$ kann durch gewöhnliche Ableitungen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta q_j(t')} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L(q_j(t) + \varepsilon\delta(t - t'), \dot{q}_j(t) + \varepsilon\delta'(t - t'), t) - L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t)}{\varepsilon} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta(t - t') + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta'(t - t') \end{aligned}$$

Für die Umformung wurde Taylor benutzt:

$$f(x+\eta, y+\eta) = f(x,y) + \eta \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\eta=0} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\eta=0} + \mathcal{O}(\eta^2)$$

$$\begin{aligned}
\delta L &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t' \sum_{j=1}^{S} \frac{\delta L}{\delta q_j(t')} \delta q_j(t') \\
&= \sum_{j=1}^{S} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t' \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta(t-t') \delta q_j(t') + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta'(t \overset{\uparrow}{-} t') \overset{\downarrow}{\delta q_j}(t') \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{S} \Big\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j(t) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j(t') \delta(t-t') \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_j(t) \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^{S} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j(t) + \overset{\downarrow}{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overset{\uparrow}{\delta q_j}(t) \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{S} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Big\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Big\} \delta q_j(t)
\end{aligned}$$

Für holonome Zwangsbedingungen sind die $\delta q_j(t)$ unabhängig, es ergeben sich die Lagrange-Gleichungen 2. Art.
Für nicht-holonome Zwangsbedingungen folgen die Lagrange-Gleichungen 1. Art.

3.4 Erhaltungssätze

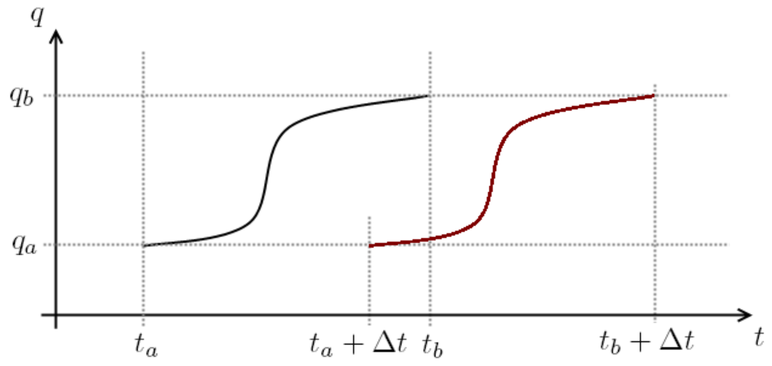
Beispiel: zyklische Variablen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{L.G.}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \\
&\Rightarrow p_j = p_j(q_1, ..., q_S, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_S, t) = \text{const.}
\end{aligned}$$

Dies erniedrigt die Größe (Komplexität) des zu lösenden Differentialgleichungssystems.
Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung):

$$I_r(q_1, ..., q_S, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_S, t) = c_r = \text{const.} \tag{3.48}$$

Beispiele:
1) **Homogenität der Zeit**
In diesem Fall: Form der Bahn $\vec{q}(t)$ hängt nicht vom Anfangszeitpunkt t_a ab, falls die Anfangsbedingung $\vec{q}(t_a) = \vec{q}_a$ ist. (Invarianz unter Zeittranslation)



Invarianz unter Zeittranslation bedeutet:

$$\vec{q}(t_a) = \vec{q}_a,\ \dot{\vec{q}}_a(t_a) = \dot{\vec{q}}_a:\ \vec{q}(t) \text{ ist Lösung, mit } \vec{q}(t_b) = \vec{q}_b$$
$$\vec{q}\,'(t_a + \Delta t) = \vec{q}_a,\ \dot{\vec{q}}\,'_a(t_a + \Delta t) = \dot{\vec{q}}_a:\ \vec{q}\,'(t + \Delta t) = \vec{q}(t) \text{ Lösung, mit } \vec{q}\,'(t_b + \Delta t) = \vec{q}_b$$

Dies ist nur möglich, falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (Gl. 3.41), d. h. $L = L(q_1, ..., q_S, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_S)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{S} \Bigg(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\overset{L.G.}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j \Bigg) + \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j \right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{S} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \dot{q}_j \\
\Rightarrow \qquad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - L \right)}_{=:H} = 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Die Funktion

$$H = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - L \tag{3.50}$$

heißt **Hamiltonfunktion** des Systems. Es gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H = H(q_1, ..., q_S, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_S) = \text{const.} = E \tag{3.51}$$

Physikalische Interpretation von H:
Annahme: holonom-skleronome Zwangsbedingungen ($\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$)

$$\begin{aligned}
\vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, ..., q_S, t) \\
\Rightarrow \dot{r}_i &= \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}
\end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{S} \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\Big)}_{=:\,u_{jl}(q_1,\dots,q_S)} \dot{q}_j\dot{q}_l \tag{3.52}$$

u_{jl} ist die verallgemeinerte Masse.
Man sagt: T ist eine homogen-quadratische Funktion der Geschwindigkeiten (homogene Funktion 2. Grades), d. h.:

$$\begin{aligned} T_a(q_1,...,q_S,\dot{q}_1,...,\dot{q}_S) &:= T_a(q_1,...,q_S,a\dot{q}_1,...,a\dot{q}_S) \\ &= a^2 T_a(q_1,...,q_S,\dot{q}_1,...,\dot{q}_S) \end{aligned}$$

Damit:

$$\frac{\partial T_a}{\partial a} = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2\,aT = \frac{2}{a}\,T_a$$

Daraus folgt mit $a = 1$ und $T_a = T$ der Eulersche Satz über homogene Funktionen:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{S} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2T}$$

Benütze noch $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$:

$$\sum_{j=1}^{S} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \dot{q}_j = 2T$$

Hamiltonfunktion:

$$H = \sum_{j=1}^{S} p_j\dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V$$

Also:

$$H = T + V = E \tag{3.53}$$

E ist die **Gesamtenergie**, die Summe aus kinetischer und potentieller Energie.

2) **Homogenität des Raumes**
$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(q_1(t),...,q_S(t))$ sei Lösung. Damit ist $\vec{r}_i{}'(t) = \vec{r}_i(t) + \Delta\vec{r} = \vec{r}_i(q_1,...,q_j + \Delta q_j,...,q_S)$ ebenfalls eine Lösung.
Dabei wurden die generalisierten Koordinaten so gewählt, dass $q_j \to q_j+\Delta q_j$ eine räumliche Verschiebung aller Teilchen $\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \Delta\vec{r}$ erzeugt.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r} \xrightarrow{\Delta q\to 0} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\Delta q_j$$

Mit

$$\vec{n}_j := \lim_{\Delta q_j\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta q_j}$$

folgt:

$$\boxed{n_j = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}$$

Die Invarianz unter räumlicher Verschiebung ist gewährleistet, wenn q_j eine zyklische Variable ist, $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$. Mit $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &\overset{(3.19)}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}_{=\vec{p}} \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{=\vec{n}_j} \\ &= \vec{p} \cdot \vec{n}_j \end{aligned} \tag{3.54}$$

$\vec{p} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$ ist der Gesamtimpuls des Systems.
Die erhaltene Größe $\vec{p} \cdot n_j$ ist die Impulskomponente entlang der Verschiebung.
Mit $\delta \vec{r}$ beliebig folgt

$$\boxed{\vec{p} = \text{const.}}$$

Satz von Noether (Emmy Noether, 1918):
Die Lagrangefunktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ sei unter der Transformation $\vec{q} \to \vec{h}^s(\vec{q})$ invariant, wobei $s \in \mathbb{R}$ und $\vec{h}^{s=0}(\vec{q}) = \vec{q}$.
Dann gibt es ein Integral der Bewegung (=Erhaltungsgröße)

$$I(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} h_j^s \Big|_{s=0} \tag{3.55}$$

Beweis: Sei $\vec{q}(t)$ Lösung der Lagrange-Gleichung. Dann ist $\vec{q}^{\,s}(t) = \vec{h}^s(\vec{q}(t))$ auch Lösung (alles), d. h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\vec{q}^{\,s}(t), \dot{\vec{q}}^{\,s}(t)) - \frac{\partial L}{\partial q_j} (\vec{q}^{\,s}(t), \dot{\vec{q}}^{\,s}(t)) = 0 \qquad (j = 1, ..., S) \tag{3.56}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L(\vec{q}^{\,s}(t), \dot{\vec{q}}^{\,s}(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{S} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\mathrm{d}q_j^s}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}\dot{q}_j^s}{\mathrm{d}s} \right] \end{aligned} \tag{3.57}$$

Setze Gl. 3.56 in Gl. 3.57 ein:

$$\sum_{j=1}^{S} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} h_j^s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} h_j^s \right] = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} h_j^s = 0 \qquad \text{(s=0)}$$

Beispiel: Invarianz unter Drehungen

$$\vec{h}^s(\vec{r}_i) = R^s\vec{r}_i$$

(keine Zwangsbedingungen: $\vec{r}_i \leftrightarrow q_i$)
Drehung (um die z-Achse):

$$\begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) & 0 \\ -\sin(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{h}^s(\vec{r}_i)\Big|_{s=0} &= \frac{\mathrm{d}R^s}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\vec{r}_i \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{iy} \\ -r_{ix} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \hat{e}_z \times \vec{r}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{h}^s(\vec{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(\hat{e}_z \times \vec{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\underbrace{\vec{r}_i \times p_i}_{=\vec{l}_i})\hat{e}_z = L_z \end{aligned}$$

$\vec{l}_i$ ist der Drehimpuls des i-ten Teilchens, $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i \times p_i)$ ist der Gesamtdrehimpuls.
Noether:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = 0}$$

Die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses bleibt erhalten.

Die 10 klassischen Erhaltungssätze
Lagrange-Funktion eines abgeschlossenen (konservativen) N-Teilchen-Systems (ohne Zwangsbedingungen):

$$L(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, ..., \dot{\vec{x}}_N) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_N) \equiv T - V$$

Invarianz unter inhomogenen Galilei-Transformationen (Kap. 2.1):

$$\begin{aligned} \vec{x}\,' &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{x}_0 \\ t' &= t + t_0 \end{aligned}$$

d. h.

$$V(R\vec{x}_1 + \vec{v}(t+t_0) + \vec{x}_0, R\vec{x}_N + \vec{v}(t+t_0) + \vec{x}_0) = V(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_N)$$

für alle $R \in \mathrm{SO}(3)$, $\vec{v}$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.
Galilei-Transformation: 10 kontinuierliche Parameter $\rightarrow$ 10 Erhaltungsgrößen:

i. t_0: Zeittranslationen: Energieerhaltung $\rightarrow 1$

ii. $\vec{x}_0$: Raumtranslationen: Impulserhaltung $\vec{p} = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i$ $\rightarrow 3$

iii. R: räumliche Drehungen: Drehimpulserhaltung $\rightarrow 3$

iv. $\vec{v}$: spezielle Galilei-Transformationen (mit Noether-Theorem):
Schwerpunkt $\vec{x}_0 = \frac{\sum_i m_i (\vec{x}_i - \vec{v}_i t)}{\sum_i m_i}$ $\rightarrow 3$

4 Hamilton-Formalismus

Es geht um eine Umformung der Lagrange-Mechanik, bei gleichem Gültigkeitsbereich. Dies ist wichtig für die Formulierung von Quantenmechanik und statistischer Mechanik.

Lagrange		**Hamilton**
$(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$	$\rightarrow$	$(\vec{q}, \vec{p}, t)$
$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$	$\rightarrow$	$H(\vec{q}, \vec{p}, t)$
S Dgl. 2. Ordnung	$\rightarrow$	$2S$ Dgl. 1. Ordnung
für $\vec{q}(t)$ im **Konfigurationsraum**		für $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ im **Phasenraum**

4.1 Hamiltonfunktion

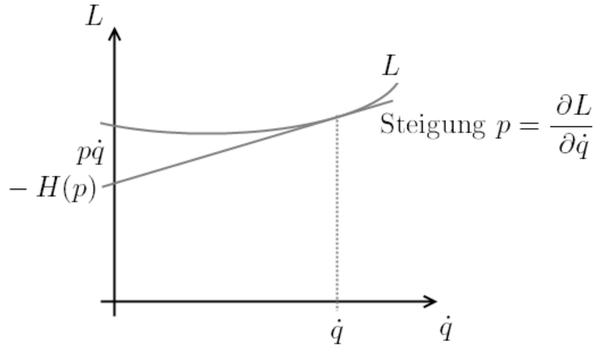
Legendre-Transformation: $L \rightarrow H$

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \tag{4.1}$$

wobei:

$$p_j = \frac{\partial L}{\dot{q}_j} = p_j(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \tag{4.2}$$

Geometrisch:



Analytisch:

- löse Gl. 4.2 auf nach $\dot{q}_j = \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}, t)$
- setze ein in Gl. 4.1

totales Differential von H:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &\overset{(4.1)}{=} \sum_j (\mathrm{d}p_j \dot{q}_j + p_j \mathrm{d}\dot{q}_j) - \sum_j \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j} \mathrm{d}q_j + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \mathrm{d}\dot{q}_j \Big) - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Durch Vergleichen der beiden Gleichungen erhält man die

Hamiltonschen Gleichungen/kanonischen Gleichungen:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{4.3}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{4.4}$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.5}$$

Bei einer zyklischen Variable q_j:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_j} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Beispiel:
1) ein Teilchen (ohne Zwangsbedingungen)

$$L = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2}_{=T} - V(\vec{r}), \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}$$

$$\boxed{H = \vec{p}\dot{\vec{r}} - L = m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2}_{=T} + V(\vec{r})}$$

$\dot{\vec{r}}$ ersetzen durch $\vec{p}$:

$$\boxed{H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})} \tag{4.6}$$

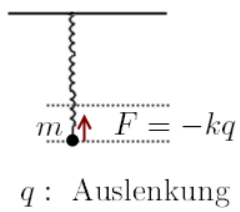
Kanonische Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \end{aligned}$$

Aus diesen beiden folgt die Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \vec{F}$$

2) **Harmonischer Oszillator**



$$
\begin{aligned}
H &= T + V = \frac{p^2}{2m} + V(q) \\
F &= -kq = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q} \\
\Rightarrow V &= \frac{k}{2}q^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \qquad (\omega^2 := \frac{k}{m})
\end{aligned}
$$

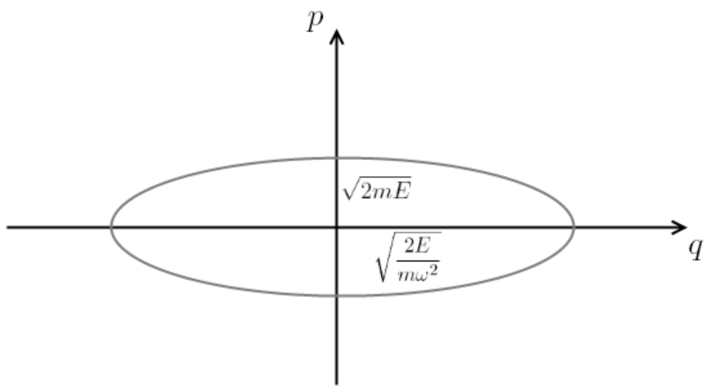
$$
\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2} \tag{4.7}
$$

$$
\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(q,p) = E = \text{const.}
$$

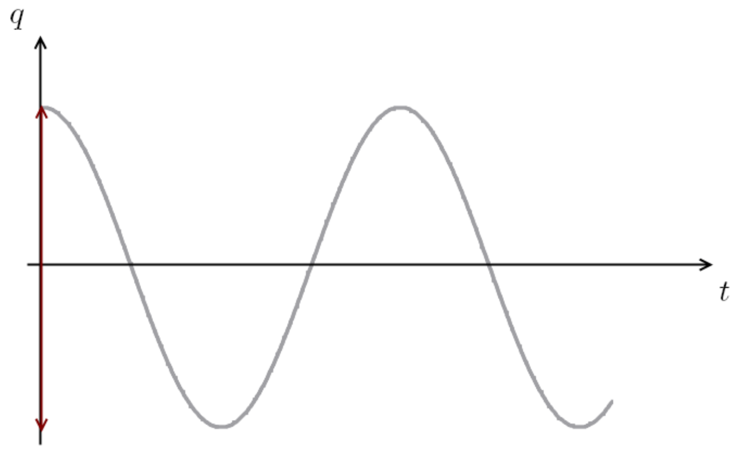
Gl. 4.7 dividiert durch E:

$$
1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}}
$$

Bahn im Phasenraum (Ellipse mit Halbachsen $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$, $b = \sqrt{2mE}$):



Bahn im Konfigurationsraum:



Hamilton:

$$m\ddot{q} = -m\omega^2 q$$
$$\boxed{\ddot{q} + \omega^2 q = 0}$$

4.2 Variationsprinzipen

1) Hamiltonsches Prinzip im Lagrange-Formalismus

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\mathrm{d}t = 0$$

wobei t_1, t_2 fest und $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$.
Benütze:

$$H = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - L \Leftrightarrow L = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - H$$

Modifiziertes Hamiltonsches Prinzip:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - H(\vec{p}(t), \vec{q}(t), t) \right) = 0 \tag{4.8}$$

- Hier kann man $\dot{q}_j = \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t)$ schreiben und in Gl. 4.8 einsetzen.
- Behandle q und p als unabhängige Variablen.
- Damit ist Gl. 4.8 ein **Variationsproblem im Phasenraum**.
- Die Wirkung $S = S[\vec{q}(t), \vec{p}(t)]$ wird im Phasenraum variiert.

$$\begin{aligned} \vec{q} &\rightarrow \vec{q} + \delta\vec{q} \\ \vec{p} &\rightarrow \vec{p} + \delta\vec{p} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hamiltonsches Prinzip} & \rightarrow & \text{Hamiltonsches Prinzip} \\ & & \text{(Phasenraum)} \\ \downarrow & & \downarrow \text{z.z.} \\ \text{Lagrange-Gleichungen} & \xrightarrow{\text{Legendre}} & \text{Hamilton-Gleichungen} \end{array}$$

Beginne mit Gl. 4.8:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H(\vec{p}, \vec{q}, t) \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{j=1}^{S} \left(\delta p_j \dot{q}_j + p_j \delta \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{j=1}^{S} \left[\underbrace{\delta p_j}_{\neq 0} \underbrace{\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right)}_{=0} - \delta q_j \underbrace{\left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)}_{=0} \right]
\end{aligned}$$

Weil die δp_j, δq_j unabhängig sind, folgen die Hamilton-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} &= 0 \qquad (j = 1, ..., S) \\
\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} &= 0 \qquad (j = 1, ..., S)
\end{aligned}$$

2) Prinzip der kleinsten Wirkung (Prinzip von Maupertuis)

	Hamilton	**Maupertuis**
Anfangs- und Endpunkt	fest $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$	fest $\Delta\vec{q}(t_1) = \Delta\vec{q}(t_2) = 0$
Anfangs- und Endzeit (t_1, t_2)	fest	variabel
Durchlaufzeit	$\delta t = 0$	$\Delta t \neq 0$
Energie (konserv. Sys.)	variabel	fest $H = E = \text{const.}$

Konservatives System $H = E = \text{const.}$:

$$\begin{aligned}
S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - \underbrace{H(\vec{p}, \vec{q}, t)}_{=E} \right) \\
&= A - E(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

Verkürzte (reduzierte) Wirkung:

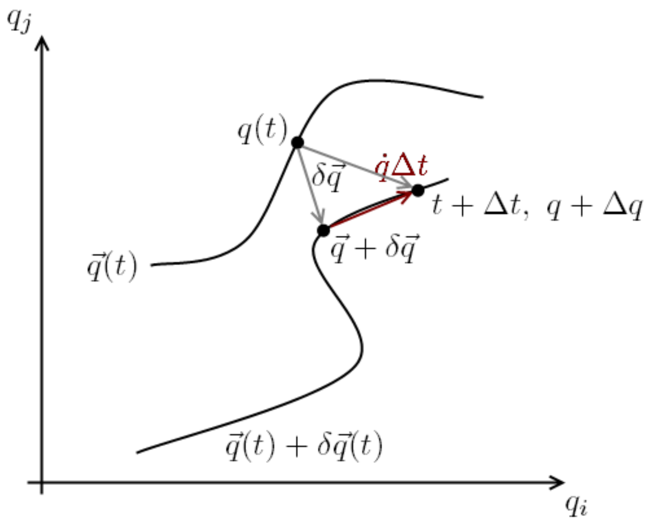
$$\boxed{A = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j} \tag{4.9}$$

Prinzip von Maupertuis:

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j = 0 \tag{4.10}$$

$\Delta\vec{q}$ bezeichnet die Variation bei fester Energie und variabler Zeit:

$$\Delta\vec{q} = \delta\vec{q} + \dot{\vec{q}} \cdot \Delta t \tag{4.11}$$



Beweis:

$$\begin{aligned} A &= S + E(t_2 - t_1) \\ \Delta A &= \Delta S + E(\Delta t_2 - \Delta t_1) \end{aligned}$$

Wie berechnet man $\Delta S = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t$?
Vertauschen von Δ und $\int$ nicht möglich, weil die Zeiten $t_{1,2}$ variabel sind.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = I(\vec{q}, t_2) - I(\vec{q}, t_1)$$

$$\underbrace{\Delta S = \delta I(\vec{q}, t_2) - \delta I(\vec{q}, t_1)}_{=\delta S} + \underbrace{\dot{I}(\vec{q}, t_2)}_{=L(\vec{q}, t_2)}\Delta t_2 - \underbrace{\dot{I}(\vec{q}, t_1)}_{=L(\vec{q}, t_1)}\Delta t_1$$

$$\Delta S = \delta S + L(t)\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Hier ist $\delta S \neq 0$ weil $\Delta\vec{q}(t_1) = \Delta\vec{q}(t_2) = 0$ anstelle von $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$ gilt.
Es fehlt noch δS:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \cdot \sum_{j=1}^{S} \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \Big) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{j=1}^{S} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\overset{(4.11)}{=} \sum_{j=1}^{S} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Delta q_j - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j}\dot{q}_j \Delta t \Big)\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= -\sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j \Delta t\Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Der letzte Schritt erfolgt mit $\Delta\vec{q}(t_1) = \Delta\vec{q}(t_2) = 0$.

$$\begin{aligned}\Delta S &= \underbrace{\Big(L - \sum_j p_j \dot{q}_j\Big)}_{=-H} \Delta t\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= -E(\Delta t_2 - \Delta t_1)\end{aligned}$$

Damit:

$$\Delta A = 0$$

3) Fermatsches Prinzip
kräftefreie Bewegung: $V = \text{const.}$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{S} \dot{q}_j p_j &= H + L \\ &= (T+V) + (T-V) = 2T\end{aligned}$$

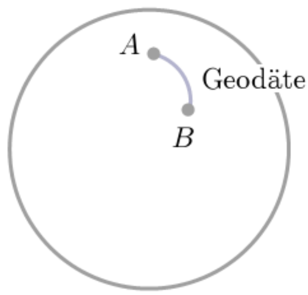
$$\begin{aligned}H &= T + V = E = \text{const.} \Rightarrow T = \text{const.} \\ A &= \int_{t_1}^{t_2} 2T \,\mathrm{d}t = 2T(t_2 - t_1) \propto t_2 - t_1\end{aligned}$$

$$\Delta A \propto \boxed{\Delta(t_2 - t_1) = 0} \Rightarrow \textbf{Prinzip des schnellsten Weges} \tag{4.12}$$

Spezialfall: Massepunkt

$$\begin{aligned}T &= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \text{const.} \Rightarrow |\dot{\vec{r}}| = \text{const.} \\ \Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t &= \Delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{|\dot{\vec{r}}|\mathrm{d}t}_{=\mathrm{d}s} = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = 0 \Rightarrow \textbf{Prinzip des kürzesten Weges}\end{aligned} \tag{4.13}$$

ohne Zwangsbedingungen: freie Bewegung im $\mathbb{R}^3$
mit Zwangsbedingungen: Teilchen auf Oberfläche



4) Prinzip von Euler-Maupertuis (Jacobi)
Idee:

- eliminiere die Zeit
- Variationsprinzip für räumliche Bahn

Gl. 4.10:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \dot{q}_j p_j = \Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T \, \mathrm{d}t = 0$$

Skleronome Zwangsbedingungen:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,l} \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l$$

Verallgemeinerte Massen:

$$\mu_{jl} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$$

$m_i > 0 \Rightarrow \mu_{jl}$ ist eine positiv definite Matrix (klar, da $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 > 0$).
Benützen μ_{jl} als **metrischen Tensor** im Konfigurationsraum:

$$\mathrm{d}\varrho^2 := \sum_{j,l} \mu_{jl} \mathrm{d}q_j \mathrm{d}q_l$$

Damit:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}\varrho^2}{\mathrm{d}t^2} \text{ oder } \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\sqrt{2T}}$$

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T \, \mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \Delta \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} \sqrt{T} \, \mathrm{d}\varrho \overset{\Delta = \delta}{=} \delta \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} \sqrt{T} \, \mathrm{d}\varrho = 0$$

$$E = T + V \Rightarrow T = E - V(\vec{q})$$

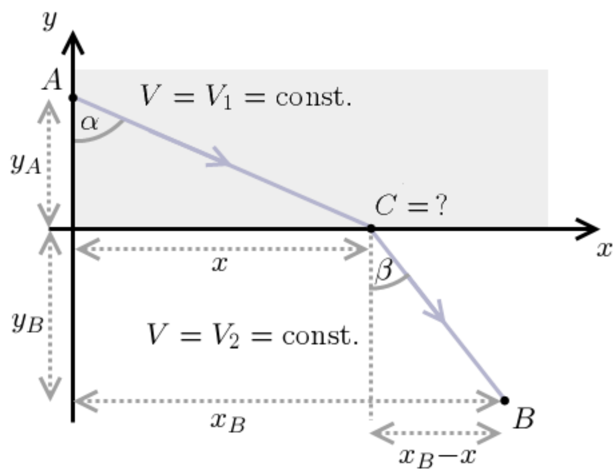
$$\delta \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} \sqrt{E - V(\vec{q})} \, \mathrm{d}\varrho = 0 \tag{4.14}$$

Spezialfall: $V = \text{const.}$

$$\delta \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} \mathrm{d}\varrho = 0 \tag{4.15}$$

Beispiel: Elektronen-Optik
Anwendung: Elektronenmikroskop
Elektron im Potential V:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} V_1 & , y > 0 \\ V_2 & , y \leq 0 \end{cases}$$



- Elektron bewegt sich von A nach B.
- An welchem Punkt $C = (x, 0)$ durchstößt es die Grenzfläche $y = 0$?

Wissen: Im Bereich wo $V = \text{const.}$ ist, bewegt sich das Elektron auf Geraden (Fermatsches Prinzip).
Benütze Gl. 4.14 und $\mathrm{d}\varrho^2 = m(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) = m\mathrm{d}s^2$:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \int_A^B \sqrt{2m(E - V(\vec{r}))} \underbrace{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}_{=\mathrm{d}s} \\
&= \delta \int_A^C \sqrt{2m(E - V_1)}\mathrm{d}s + \delta \int_C^B \sqrt{2m(E - V_2)}\mathrm{d}s \\
&= \sqrt{2m(E - V_1)}\delta \int_A^C \mathrm{d}s + \sqrt{2m(E - V_2)}\delta \int_C^B \mathrm{d}s \\
&= \sqrt{2m(E - V_1)}\delta \sqrt{x^2 + y_A^2} + \sqrt{2m(E - V_2)}\delta \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2} \\
&= \sqrt{2m(E - V_1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2 + y_A^2}\delta x + \sqrt{2m(E - V_2)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}\delta x
\end{aligned}$$

Mit $\delta x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= \sqrt{E - V_1}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} + \sqrt{E - V_2}\frac{-(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} \\
&= \sqrt{E - V_1}\sin\alpha - \sqrt{E - V_2}\sin\beta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{E - V_2}{E - V_1}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{v_2}{v_1}}$$

Dies ist das Gesetz von Snellius ($\rightarrow$ Optik).

4.3 Poisson-Klammern

Zustände und Observablen

Der Zustand eines mechanischen Systems ist ein vollständiger und minimaler Satz von Informationen, aus denen alle Eigenschaften des Systems berechnet werden können.

Beispiele:

1) Ort $\vec{q} \in K$ ist keine vollständige Beschreibung eines Zustandes.

2) Lagrange-Mechanik: Orte und Geschwindigkeiten $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

3) Hamilton-Mechanik: Orte und Impulse $(\vec{q}, \vec{p})$

Observable: Ist eine mechanische Eigenschaft (Größe) des Systems; immer eine Funktion des Zustandes.

Im Hamilton-Formalismus: $f(\vec{p}, \vec{q}, t)$
Beispiele:

1) $f = H$: Energie

2) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$: Drehimpuls

$$\begin{array}{ccc}
\text{Kenne Zustand } (\vec{q}(t_0), \vec{p}(t_0)) & \xrightarrow{f} & \text{Observable } f(\vec{p}, \vec{q}, t) \\
\text{zum Zeitpunkt } t_0. & & \text{bei } t = t_0 \\
\downarrow \text{ Löse Bewegungsgl.} & & \downarrow ? \\
\text{Zustand } (\vec{q}(t_1), \vec{p}(t_1)) & \xrightarrow{f} & \text{Observable } f(\vec{q}(t_1), \vec{p}(t_1), t_1) \\
\text{bei } t = t_1 & & \text{bei } t = t_1
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\
&= \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\
&=: \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}
\end{aligned}$$

Definition: Die **Poisson-Klammer** der Funktion f mit der Funktion g ist:

$$\{f, g\} := \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \tag{4.16}$$

Damit:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.17}$$

Für Hamilton-Gleichungen setze $f = p_j$ bzw. $f = q_j$. Benütze $\frac{\partial p_j}{\partial p_l} = \delta_{jl}$, $\frac{\partial q_j}{\partial q_l} = \delta_{jl}$ und $\frac{\partial q_j}{\partial p_l} = \frac{\partial p_j}{\partial q_l} = 0$:

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{4.18}$$

$$\dot{p}_j = \{p_j, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{4.19}$$

Fundamentale Poisson-Klammern:

$$\{q_j, q_l\} = 0 \tag{4.20}$$
$$\{p_j, p_l\} = 0 \tag{4.21}$$
$$\{q_j, p_l\} = \delta_{jl} \tag{4.22}$$

Beweis von Gl. 4.22:

$$\{q_j, p_l\} = \sum_{k=1}^{S} \Big(\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{=\delta_{jk}} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_k}}_{=\delta_{lk}} - \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial q_k}}_{=0} \Big) = \delta_{jl}$$

weitere Eigenschaften der Poisson-Klammer:

1. Antisymmetrie:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{4.23}$$
$$\{f, f\} = 0 \tag{4.24}$$

2. Linearität

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f_1, g\} + c_2\{f_2, g\} \tag{4.25}$$

(c_1, c_2 sind Konstanten, unabhängig von $\vec{q}$, $\vec{p}$)

3. „Null:“

$$\{c, g\} = 0 \tag{4.26}$$

(c eine Konstante)

4. Produktregel:

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h \tag{4.27}$$

5. Jacobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{4.28}$$

Beweis der Jacobi-Identität:

$$x := (q_1, ..., q_S, p_1, ..., p_S)$$

$$\{f, g\} = \sum_{k,l}^{2S} \frac{\partial f}{\partial x_k} J_{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l}$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_S \\ -I_S & 0 \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= \sum_{ijkl=1}^{2S} \frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\frac{\partial g}{\partial x_k} J_{kl} \frac{\partial h}{\partial x_k} \Big) \\ &= \sum_{ijkl=1}^{2S} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \, \partial x_k} J_{kl} \frac{\partial h}{\partial x_l} + \frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_k} J_{kl} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \, \partial x_l} \Big) \end{aligned}$$

zyklische Vertauschung, sammle Terme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \, \partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_l}$$

Summationsindizes umbenennen:

$$ijkl \to lkij$$

Koeffizienten:

$$J_{ij} J_{kl} + \underbrace{J_{lk}}_{=-J_{kl}} J_{ij} = 0$$

Erhaltungsgrößen
Observable $f(\vec{q}, \vec{p})$, so dass:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$$

Mit der Poisson-Klammer:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

folgt:

$$\{f, H\} = -\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.29}$$

Falls f nicht explizit zeitabhängig ist, wird die Bedingung dafür, dass f eine Erhaltungsgröße ist:

$$\{f, H\} = 0 \tag{4.30}$$

Vorteil: Man muss die Bewegungsgleichungen nicht lösen (vgl. Lagrange-Formalismus).

Satz von Poisson: Die Poisson-Klammer zweier Erhaltungsgrößen ist wieder eine Erhaltungsgröße.
Beweis: f, g seien Erhaltungsgrößen:

$$\begin{aligned} \{f, H\} &= -\frac{\partial f}{\partial t} \\ \{g, H\} &= -\frac{\partial g}{\partial t} \end{aligned}$$

Zu zeigen:

$$\{\{f, g\}, H\} = -\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = -\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} - \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}.$$

Benutze die Jacobi-Identität ($h = H$):

$$\{\{f, g\}, H\} + \{\underbrace{\{H, f\}}_{=\frac{\partial f}{\partial t}}, g\} + \{\underbrace{\{g, H\}}_{=-\frac{\partial g}{\partial t}}, f\} = 0$$

Daraus folgt:

$$\{\{f, g\}, H\} = -\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} - \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}$$

Beispiel: $f = H$:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\{H, H\}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Falls $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$: $H = E = \text{const.}$

Bezug zur Quantenmechanik (QM)

	klassisch	QM	
Zustand	$(\vec{q}, \vec{p})$		komplexe Funktion $\psi(\vec{q}), \psi: K \to \mathbb{C}$ $\psi \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$: Hilbertraum
Observablen	$f(\vec{q}, \vec{p})$, $g(\vec{q}, \vec{p})$, ...		hermitesche Operatoren auf $\mathcal{H}$: $\hat{A}$, $\hat{B}$, ...

$$\begin{array}{ccc} q_j & \xrightarrow{\text{Korrespondenz-}} & \hat{q}_j\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H} \\ p_j & \xrightarrow{\text{prinzip}} & \hat{p}_j = -i\frac{\partial}{\partial q_j}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hamiltonfunktion} & & \text{Hamiltonoperator} \\ H(\vec{q}, \vec{p}, t) & \longrightarrow & \hat{H} \\ & & \\ \{f, g\} & \longrightarrow & \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \qquad (*) \\ \text{fundamentale PK} & & \\ \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} & \longrightarrow & \left[\hat{q}_i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\delta_{ij} \end{array}$$

$(*)$ Planck-Konstante: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js; Kommutator: $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

4.4 Kanonische Transformationen

Newton $\xrightarrow{\text{gen. Koord.}}$ Lagrange $\xrightarrow{\text{Legendre}}$ Hamilton $\xrightarrow{\text{kanonische Transf.}}$ Hamilton-Jacobi

Idee:
Lagrange-Formalismus: Unter Punkt-/Koordinatentransformationen $\vec{q}\,' = \vec{q}\,'(\vec{q})$ sind die Lagrange-Gleichungen invariant, die Hamilton-Formulierung ebenfalls.
Hamilton-Formalismus: Phasenraum, in dem Orte und Impulse unabhängige und gleichberechtigte Variablen sind. Betrachte die Transformationen:

$$\begin{aligned} \vec{q}\,' &= \vec{q}\,'(\vec{q}, \vec{p}) \\ \vec{p}\,' &= \vec{p}\,'(\vec{q}, \vec{p}) \end{aligned}$$

1. Diese sind allgemeiner als Punkttransformationen im Lagrange-Formalismus.

2. Transformationen im Phasenraum lassen die kanonischen Gleichungen nur unter geweissen Bedingungen invariant.
   Frage: Welches sind diese Bedinungen?

Definition: Eine Transformation $(\vec{q}, \vec{p}) \to (\vec{q}\,', \vec{p}\,')$ heißt **kanonisch**, falls es eine Funktion $H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t)$ gibt, sodass

$$\dot{q}_j' = \frac{\partial H'}{\partial p_j'} \text{ und } \dot{p}_j' = -\frac{\partial H'}{\partial q_j'} \tag{4.31}$$

Frage: Wie erhält man H' aus H?
Im Allgemeinen kann H' irgendeine Funktione sein, aber oft erhält man H' „durch Einsetzen“:

$$H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,', t) = H(\vec{q}(\vec{q}\,', \vec{p}\,'), \vec{p}(\vec{q}\,', \vec{p}\,'), t) \tag{4.32}$$

Dann nennt man die Transformation **kanonisch im eigentlichen Sinn.**

Beispiele:
1)

$$\vec{q}\,' = -\vec{p}, \; \vec{p}\,' = \vec{q}$$
$$H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,') = H(\vec{q}, \vec{p}) = H(\vec{p}\,', -\vec{q}\,')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial p'_j} &= \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = \dot{q}'_j \\ \frac{\partial H'}{\partial q'_j} &= -\frac{\partial H}{\partial p_j} = -\dot{q}_j = -\dot{p}'_j \end{aligned}$$

Diese Transformation ist kanonisch im eigentlichen Sinn.

2) **Zyklische Koordinaten:**
q_j für die $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ und somit $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$ und $\dot{p}_j = 0$, $p_j = \text{const.}$ (Erhaltungsgröße).
Wunsch: Alle q_j $(j = 1, ..., S)$ sollen zyklisch sein, und $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Dann kann man das Problem trivial lösen, denn:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \;(\forall j) \Leftrightarrow H = H(\vec{p})$$

und mit

$$\dot{p}_j = 0 \;(\forall j) \Leftrightarrow p_j = \text{const.} = c_j$$

folgt

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j(p_1, ..., p_S) = \dot{q}_j(c_1, ..., c_S) = \text{const.} =: \alpha_j \;\; (\forall j)$$

Integriere:

$$\begin{aligned} q_j(t) &= \alpha_j t + q_j(0) \\ p_j(t) &= p_j(0) \end{aligned} \tag{4.33}$$

Die α_j werden aus H berechnet, die $q_j(0)$, $p_j(0)$ aus den Anfangsbedingungen.
Frage: Gibt es eine kanonische Transformation, so dass alle Koordinaten zyklisch sind? Dies ist die Fragestellung der Hamilton-Jacobi-Theorie.

Die symplektische Struktur im Phasenraum

$$\begin{aligned} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} &= (q_1, q_2, ..., q_S, p_1, p_2, ..., p_S)^T \\ &= (x_1, x_2, ..., x_{2S})^T \end{aligned}$$

Hamilton-Funktion:

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = H(\vec{x}, t)$$

Hamilton-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}} &= (\dot{q}_1, ..., \dot{q}_S, \dot{p}_1, ..., \dot{p}_S)^T \\
&= \Big(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, ..., \frac{\partial H}{\partial p_S}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, -\frac{\partial H}{\partial q_2}, ..., -\frac{\partial H}{\partial q_S}\Big)^T \\
&= \Big(\frac{\partial H}{\partial x_{S+1}}, \frac{\partial H}{\partial x_{S+2}}, ..., \frac{\partial H}{\partial x_{2S}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, -\frac{\partial H}{\partial x_2}, ..., -\frac{\partial H}{\partial x_S}\Big)^T \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_S \\ -I_S & 0 \end{pmatrix}}_{=J} \underbrace{\Big(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial H}{\partial x_{2S}}\Big)^T}_{=\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = \nabla H}
\end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\boxed{\dot{x} = J\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}} \tag{4.34}$$

Transformation: $\vec{x} \to \vec{y}(\vec{x})$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_i &= \sum_{j=1}^{2S} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\dot{x}_j = \sum_{j,k,l} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial H}{\partial x_k} \\
&= \sum_{j,k,l} \underbrace{\frac{\partial y_i}{\partial x_j}}_{=: \mathcal{J}_{ij}} J_{jk} \frac{\partial H}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_k} \stackrel{!}{=} \sum_{l=1}^{2S} J_{il}\frac{\partial H}{\partial y_l}
\end{aligned}$$

Mit der Jacobi-Matrix

$$\boxed{\mathcal{J}_{ij} := \frac{\partial y_i}{\partial x_j}} \tag{4.35}$$

kann man für alle $\vec{y}$ schreiben:

$$\dot{\vec{y}} = \mathcal{J} J \mathcal{J}^T \frac{\partial H}{\partial \vec{y}} \stackrel{!}{=} J\frac{\partial H}{\partial \vec{y}}$$

Dies gilt, falls die Bedingung für Kanonizität von $\vec{y}(\vec{x})$

$$\mathcal{J} J \mathcal{J}^T = J \tag{4.36}$$

erfüllt ist. Man sagt, $\mathcal{J}$ ist symplektisch.

Theorem: Eine Transformation $\vec{x} \to \vec{y}$ ist genau dann kanonisch, wenn sie die fundamentalen Poisson-Klammern erhällt, d. h.

(i) die Poisson-Klammern sind invariant unter kanonischen Transformationen, also:

$$\{f, g\}' = \{f, g\}$$

(ii) Umgekehrt: Eine Transformation, die die Poisson-Klammern erhält, sodass die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\begin{aligned}
\{q_i', q_j'\} = \{p_i', p_j'\} &= 0 \\
\{q_i', p_j'\} &= \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

lauten, ist kanonisch.

Beweis:
(i)

$$\begin{aligned} \{f,g\}' &= \sum_{i=1}^{S}\Big(\frac{\partial f}{\partial q_i'}\frac{\partial g}{\partial p_i'} - \frac{\partial f}{\partial p_i'}\frac{\partial g}{\partial q_i'}\Big) \\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}\Big)^T \begin{pmatrix} 0 & I_S \\ -I_S & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \vec{y}} \end{aligned}$$

Verwenden:

$$JJ^T = I \Rightarrow J^{-1} = J^T \Rightarrow \mathcal{J}^T J \mathcal{J} = J$$

$$\{f,g\}' = \underbrace{\Big(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}\Big)^T \mathcal{J}^T}_{=(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}})^T} J \underbrace{\mathcal{J}\frac{\partial g}{\partial \vec{y}}}_{=\frac{\partial g}{\partial \vec{x}}} = \{f,g\}$$

(ii)

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \Big(\frac{\partial q_i'}{\partial q_j}\Big)_{ij} & \Big(\frac{\partial q_i'}{\partial p_j}\Big)_{ij} \\ \Big(\frac{\partial p_i'}{\partial q_j}\Big)_{ij} & \Big(\frac{\partial p_i'}{\partial p_j}\Big)_{ij} \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\mathcal{J} J \mathcal{J}^T = \mathcal{J}\begin{pmatrix} 0 & I_S \\ -I_S & 0 \end{pmatrix}\mathcal{J}^T = \begin{pmatrix} \big(\{q_i', q_j'\}\big)_{ij} & \big(\{q_i', p_j'\}\big)_{ij} \\ \big(\{p_i', q_j'\}\big)_{ij} & \big(\{p_i', p_j'\}\big)_{ij} \end{pmatrix}$$

Infinitesimale kanonische Transformationen

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{q}' \\ \vec{p}' \end{pmatrix} = \vec{y}(\vec{x}) = \vec{x} + \alpha \vec{D}(\vec{x}) \tag{4.38}$$

Bedingung an $\vec{D}(\vec{x})$, damit $\vec{x} \to \vec{y}$ kanonisch?

$$\mathcal{J}_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \delta_{ij} + \alpha \underbrace{\frac{\partial D_i}{\partial x_j}}_{=:\mathcal{J}^D_{ij}}$$

oder

$$\mathcal{J} = I + \alpha \mathcal{J}^D$$

$$\begin{aligned} & (I + \alpha\mathcal{J}^D) J (I + \alpha\mathcal{J}^D)^T = J \\ \Rightarrow\ & J + \alpha(\mathcal{J}^D J + J(\mathcal{J}^D)^T) + \mathcal{O}(\alpha^2) = J \\ \Rightarrow\ & \boxed{\mathcal{J}^D J + J(\mathcal{J}^D)^T = 0} \end{aligned} \tag{4.39}$$

Benutze für diesen Gleichung folgenden Ansatz:

$$\mathcal{J}^D = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

und

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_S \\ -I_S & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_S \\ -I_S & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_S \\ -I_S & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix} = 0$$

Es folgt:

$$\begin{pmatrix} -B & A \\ -D & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^T & D^T \\ -A^T & -C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T - B & A + D^T \\ -A^T - D & C - C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man liest ab:

$$A = -D^T$$

$$\begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{q}\,' \\ \vec{p}\,' \end{pmatrix}}_{=\vec{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} F(\vec{q},\vec{p}) \\ E(\vec{q},\vec{p}) \end{pmatrix}}_{=\vec{D}(\vec{x})}$$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \qquad (i,j = 1,...,S) \\ D_{ij} &= \frac{\partial E_i}{\partial p_j} \qquad (i,j = 1,...,S) \end{aligned}$$

$$A_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j} = -D_{ji} = -\frac{\partial E}{\partial p_i}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\frac{\partial F_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial E_j}{\partial p_i}} \tag{4.40}$$

Die Bedingung aus Gl. 4.40 lässt sich erfüllen durch

$$F_i = \frac{\partial G}{\partial p_i} \text{ und } E_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{4.41}$$

wobei $G(\vec{q},\vec{p})$ eine beliebige (zweimal stetig differenzierbare Funktion) von $\vec{q}$, $\vec{p}$ ist.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial p_i\,\partial q_j} = \frac{\partial^2 G}{\partial q_j\,\partial p_i}$$

$$\vec{x} \to \vec{y} = \vec{x} + \alpha \begin{pmatrix} \frac{-\partial G}{\partial \vec{p}} \\ -\frac{\partial G}{\partial \vec{q}} \end{pmatrix} = \vec{x} + \alpha J \frac{\partial G}{\partial \vec{x}}$$

$G(\vec{x})$ erzeugt die infinitesimale kanonische Transformation im Phasenraum:

$$\vec{x} \to \vec{y} = \vec{x} + \alpha J \frac{\partial G}{\partial \vec{x}} \tag{4.42}$$

$$\vec{y} \to \vec{x}(\alpha),\ \vec{x}(\alpha) = \vec{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = J\frac{\partial G}{\partial \vec{x}}$$

"kanonische Gleichung“ mit

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow \alpha \\ H &\longrightarrow G \end{aligned}$$

Umgekehrt: H erzeugt als kanonische Transformation die mechanische Zeitentwicklung.

Erzeugende Funktion
Wir wollen nun eine erzeugende Funktion für endliche kanonische Transformationen finden. Betrachte eine beliebige (zweimal stetig differenzierbare) Funktion von $\vec{q}$ und $\vec{q}'$: $F_1(\vec{q}, \vec{q}')$
Man kann die Transformation wählen, so dass gilt:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i(\vec{q}, \vec{q}') \qquad (i = 1, ..., S) \tag{4.43}$$

Nach $\vec{q}'$ aufgelöst lautet die Vorschrift: $\vec{q}' = \vec{q}'(\vec{q}, \vec{p})$
Wie muss $\vec{p}'$ definiert werden, damit $(\vec{q}, \vec{p}) \to (\vec{q}', \vec{p}')$ kanonisch ist? Behauptung:

$$p_i' = -\frac{\partial F_1}{\partial q_i'} \tag{4.44}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\{q_i', p_j'\} &= \sum_k \Big(\frac{\partial q_i'}{\partial q_k} \frac{\partial p_j'}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i'}{\partial p_k} \frac{\partial p_j'}{\partial q_k} \Big) \\
&\overset{(4.44)}{=} -\sum_k \Big(\frac{\partial q_i'}{\partial q_k} \underbrace{\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j' \, \partial p_k}}_{=0} - \frac{\partial q_i'}{\partial q_k'} \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j' \, \partial q_k} \Big) \\
&\overset{(4.43)}{=} \sum_k \frac{\partial q_i'}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_j'} \\
&= \frac{\partial q_i'}{\partial q_j} = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{q_i', q_j'\} &= \sum_k \Big(\frac{\partial q_i'}{\partial q_k} \underbrace{\frac{\partial q_j'}{\partial p_k}}_{= \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_j'}\right)^{-1}} - \frac{\partial q_i'}{\partial p_k} \frac{\partial q_j'}{\partial q_k} \Big) \\
&= \sum_k \Big(\Big(\frac{\partial q_k}{\partial q_i'} \Big)^{-1} \Big(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_k \, \partial q_j'} \Big)^{-1} - \Big(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_k \, \partial q_i'} \Big)^{-1} \Big(\frac{\partial q_k}{\partial q_j'} \Big)^{-1} \Big) \\
&= \sum_k \Big(\Big(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i' \, \partial q_j'} \Big)^{-1} - \Big(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j' \, \partial q_i'} \Big)^{-1} \Big) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{p_i', p_j'\} &= \sum_k \Big(\frac{\partial p_i'}{\partial q_k} \frac{\partial p_j'}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i'}{\partial p_k} \frac{\partial p_j'}{\partial q_k} \Big) \\
&\overset{(4.44)}{=} \sum_k \Big(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i' \, \partial q_k} \underbrace{\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j' \, \partial p_k}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i' \, \partial p_k}}_{=0} \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j' \, \partial q_k} \Big) = 0
\end{aligned}$$

Äquivalente Formen der erzeugenden Funktion

$$F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{q}\,') \qquad p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j},\ p'_j = -\frac{\partial F_1}{\partial q'_j} \tag{4.45}$$

$$F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{p}\,') \qquad p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j},\ q'_j = \frac{\partial F_2}{\partial p'_j} \tag{4.46}$$

$$F_3 = F_3(\vec{p}, \vec{q}\,') \qquad p'_j = -\frac{\partial F_3}{\partial q'_j},\ q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j} \tag{4.47}$$

$$F_4 = F_4(\vec{p}, \vec{p}\,') \qquad q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j},\ q'_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p'_j} \tag{4.48}$$

Bemerkungen:

1. Erzeugende Funktionen verbinden eine alte ($\vec{q}$ oder $\vec{p}$) und eine neue Koordinate ($\vec{q}\,'$ oder $\vec{p}\,'$).

2. Erzeugende Funktionen sind durch eine Legendre-Transformation miteinander verbunden, z. B.:

$$\begin{aligned} F_2(\vec{q}, \vec{p}\,') &= F_1(\vec{q}, \vec{q}\,') - \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial F_1}{\partial q'_j} q'_j \\ &= F_1(\vec{q}, \vec{q}\,') + \sum_{j=1}^{S} p'_j q'_j \end{aligned} \tag{4.49}$$

3. Zeitunabhängige erzeugende Funktion: Kanonische Transformation im eigentlichen Sinn:

$$H'(\vec{q}\,', \vec{p}\,') = H(\vec{q}(\vec{q}\,', \vec{p}\,'), \vec{p}(\vec{q}\,', \vec{p}\,'))$$

   Zeitabhängige erzeugende Funktion, z. B. $F_1(\vec{q}, \vec{q}\,', t)$. Diese erzeugen allgemeine kanonische Transformationen (nicht im eigentlichen Sinn):

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{4.50}$$

Beispiele:
1) Vertauschung von Orten und Impulsen:

$$F_1(\vec{q}, \vec{q}\,') = -\sum_{j=1}^{S} q_j q'_j = \vec{q} \cdot \vec{q}\,'$$

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = -q'_j \\ p'_j &= -\frac{\partial F_1}{\partial q'_j} = q_j \end{aligned}$$

$$q'_j = -p_j,\ p'_j = q_j$$

Also: $(\vec{q},\vec{p}) \xrightarrow{F_1} (-\vec{p},\vec{q})$ ist kanonisch.

2) identische Transformation

$$F_2(\vec{q},\vec{p}\,') = \sum_{j=1}^{S} q_j p_j' = \vec{q}\cdot\vec{p}\,'$$

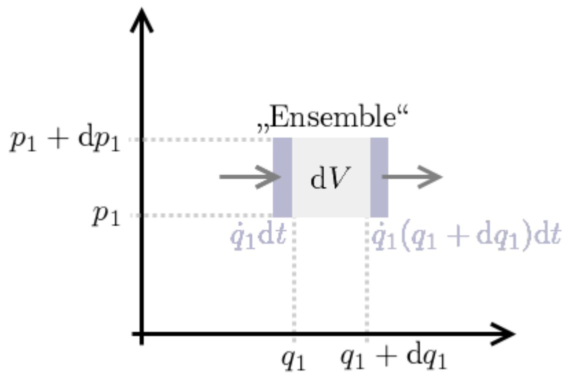
$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = p_j' \\ q_j' &= \frac{\partial F_2}{\partial p_j'} = q_j \end{aligned}$$

$(\vec{q},\vec{p}) \xrightarrow{F_2} (\vec{q},\vec{p})$ ist kanonisch.

4.5 Das Liouville-Theorem

(ca. 1840)
Motivation:

- Systeme mit vielen Freiheitsgraden (statistische Mechanik), bei N Teilchen sind es $6N$ Freiheitsgrade.
- Makrozustand mit Anfangsbedingungen, z. B. $N = 10^{23}$. Die Bestimmung von thermodynamischen Größen (z. B. Energie) durch Mittelwertsbildung. Man benutzt die Phasenraumdichte $\varrho(q_1,...,q_S,p_1,...,p_S)$.
- Die Dynamik ist durch die Hamilton-Gleichungen $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ gegeben. $\Rightarrow$ Bahnen im Phasenraum kreuzen sich nicht („deterministisch“), das Analogon ist die inkompressible Flüssigkeit.



$$N = \varrho(q_1,...,q_S,p_1,...,p_S,t)\underbrace{\mathrm{d}q_1...\mathrm{d}q_S\mathrm{d}p_1...\mathrm{d}p_S}_{=\mathrm{d}V\,(\text{Volumenelement})}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varrho}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t &= \varrho(q_1,...,p_S)\dot{q}_1\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}q_2...\mathrm{d}p_S - \varrho(q_1+\mathrm{d}q_1,...,p_S)\cdot\dot{q}_1(q_1+\mathrm{d}q_1)\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}q_2...\mathrm{d}p_S \\ &= \Big[\varrho(q_1,...,p_S) - (\varrho(q_1,...,p_S)\dot{q}_1(q_1) + \frac{\partial(\varrho\dot{q}_1)}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1)\Big]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}q_2...\mathrm{d}p_S \\ &= -\frac{\partial(\varrho\dot{q}_1)}{\mathrm{d}q_1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V \end{aligned}$$

Für alle Grenzflächen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{S} \left(\frac{\partial(\varrho \dot{q}_i)}{\mathrm{d}q_i} + \frac{\partial(\varrho \dot{p}_i)}{\mathrm{d}p_i} \right)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{S} \left(\frac{\partial \varrho}{\mathrm{d}q_i} \underbrace{\dot{q}_i}_{=\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \frac{\partial \varrho}{\mathrm{d}p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{=-\frac{\partial H}{\partial q_i}} + \varrho \Big(\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}}_{=\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}} + \underbrace{\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}}_{=-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}} \Big) \right)$$

Man kann also schreiben:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\{\varrho, H\}$$

Damit folgt die **Liouville-Gleichung:**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varrho = \{\varrho, H\} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \tag{4.51}$$

Außerdem:

$$\sum_{i=1}^{S} \left(\frac{\partial(\varrho \dot{q}_i)}{\mathrm{d}q_i} + \frac{\partial(\varrho \dot{p}_i)}{\mathrm{d}p_i} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_i} \\ \frac{\partial}{\partial p_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho \dot{q}_i \\ \varrho \dot{p}_i \end{pmatrix} = \nabla \varrho \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

Damit folgt:

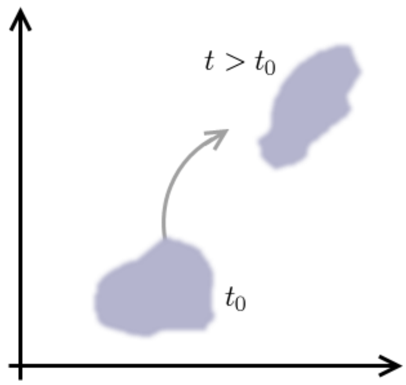
$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\nabla(\varrho \vec{v})$$

Dies ist die **Kontinuitätsgleichung** für die Phasenraumdichte $\varrho(q_1, ..., q_S, p_1, ..., p_S)$:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla(\varrho \vec{v}) = 0 \tag{4.52}$$

Liouville-Theorem (oder Satz von Liouville):

$$V(t) = V(t_0) = \text{const.} \tag{4.53}$$



Beweis:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int \mathrm{d}q(t)\mathrm{d}p(t) \\ &= \int \big|\det \mathcal{J}\big| \, \mathrm{d}q(t_0)\mathrm{d}p(t_0) \end{aligned}$$

mit $\mathrm{d}q\mathrm{d}p = \Pi_{i=1}^{S}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i$ und

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_i(t)}{\partial q_i(t_0)} & \frac{\partial p_i(t)}{\partial q_i(t_0)} \\ \frac{\partial q_i(t)}{\partial p_i(t_0)} & \frac{\partial p_i(t)}{\partial p_i(t_0)} \end{pmatrix}$$

Wir wissen, dass

$$\mathcal{J} J \mathcal{J}^T = J$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_S \\ -I_S & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Also:

$$1 = \det J = \det(\mathcal{J}^T J \mathcal{J}) = \det(\mathcal{J}^T)\det(J)\det(\mathcal{J}) = (\det \mathcal{J})^2$$

Daraus folgt:

$$\det(\mathcal{J}) = \pm 1$$

und

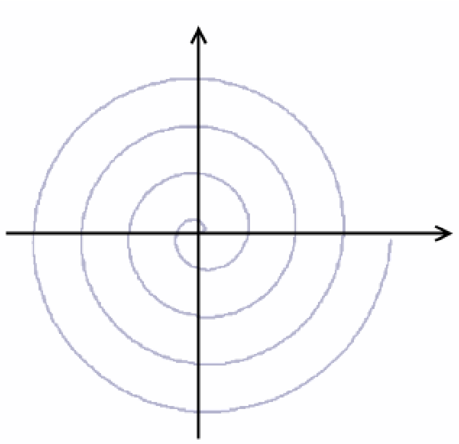
$$\left|\det(\mathcal{J})\right| = 1$$

Setzt man dies oben ein, so folgt mit $V(t_0) = \int \mathrm{d}q(t_0)\mathrm{d}p(t_0)$ die Behauptung.

Bemerkungen:

1. Die Überlegungen gelten im Phasenraum mit (q_i, p_i), z. B. aber nicht im Allgemeinen für $(q_i, \dot{q}_i)$.

2. Gilt nur in konservativen Systemen. Bei dissipativen Systemen (Systeme mit Reibung) schrumpft das Phasenraumvolumen.
   Beispiel: gedämpfter Oszillator



3. Auch wenn das Phasenraumvolumen konstant ist, können sich die Systeme exponentiell voneinander entfernen („chaotische Systeme"); Abstand $\propto \mathrm{e}^{\lambda t}$, λ ist der Lyapunov-Exponent.

4. Sei $\varrho = f(E)$, E: Erhaltungsgröße (Energie). Dann:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial q_i} = \frac{\partial \varrho}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial p_i} = \frac{\partial \varrho}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial p_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

Z. B. „mikrokanonisches Ensemble“:

$$\varrho = \begin{cases} \text{const.}, & E_0 < E < E_0 + \Delta E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bezug zur Quantenmechanik (QM)

klassisch	QM	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \hat{f} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{f}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}$	(Heisenberg-Bewegungsgl.)
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varrho = \{\varrho, H\} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}[\hat{\varrho}, \hat{H}]$	(von Neumann-Gleichung)

4.6 Hamilton-Jacobi-Theorie

Ziel: Finden einer systematischen Methode zur Lösung mechanischer Probleme mit der Idee, eine kanonische Transformation zu finden, sodass H' einfach (trivial) lösbar wird. Mögliche Strategie:

1. Eine Transformation finden, mit der H' ein bekanntes, bereits gelöstes Problem darstellt.

2. Kanonische Transformation, bei der alle q'_j zyklisch sind (siehe Beispiel 2) im Abschnitt 4.4), d. h.:

$$\dot{p}'_j = -\frac{\partial H'}{\partial q_j} = 0$$
$$\Rightarrow p'_j = \alpha_j = \text{const.}$$
$$\Rightarrow q'_j = \omega_j t + \beta_j, \ \omega_j = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_j} = \text{const.}, \ \beta_j = \text{const.}$$

3. Suche kanonische Transformation, sodass:

$$\begin{aligned} q'_j &= \text{const.} \\ p'_j &= \text{const.} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Hamilton-Jacobi-Theorie

Herleitung der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\dot{q}'_j = \frac{\partial H'}{\partial p_j} = 0, \ \dot{p}'_j = -\frac{\partial H'}{\partial q'_j} = 0$$

Fordere

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{4.54}$$

wobei F die erzeugende Funktion der gesuchten kanonischen Transformation ist. Wir wählen:

$$F = F_2 = F_2(\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}', t)$$

Hier:

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j},\ q'_j = \frac{\partial F_2}{\partial p'_j}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H &= H\Big(q_1, ..., q_S, p_1, ..., p_S, t\Big) \\ &= H\Big(q_1, ..., q_S, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial F_2}{\partial q_S}, t\Big) \end{aligned}$$

Einsetzen in Gl. 4.54:

Hamilton-Jacobi-Gleichug:

$$H\Big(q_1, ..., q_S, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial F_2}{\partial q_S}, t\Big) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \tag{4.55}$$

Bemerkungen:

1. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist eine nichtlineare, partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für F_2 in $S+1$ Variablen $q_1, ..., q_S, t$.

2. F_2 hängt auch von den p'_j ab, aber diese sind konstant: $p'_j = \alpha_j = \text{const.}$

$$F_2 = F_2\Big(q_1, ..., q_S, t, ; \alpha_1, ..., \alpha_S\Big)$$

3. Als Differentialgleichung 1. Ordnung in $S+1$ Variablen hat die Hamilton-Jacobi-Gleichung $S+1$ Integrationskonstanten. S davon sind die neuen Impulse $p'_j = \alpha_j$. Die letzte, $(S+1)$-te Integrationskonstante kommt daher, dass in Gl. 4.55 nur Ableitungen von F_2 auftreten.

4. **Die vollständige Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung:**

$$F_2\Big(q_1, ..., q_S, t, ; \alpha_1, ..., \alpha_S\Big) + \alpha_{S+1} \tag{4.56}$$

Lösungsverfahren

1. Hamiltonfunktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$

2. Setze $p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j}$ ein und stelle Hamilton-Jacobi-Gleichung auf: Gl. 4.55

3. Löse Gl. 4.55.

$$\rightarrow F_2\Big(q_1, ..., q_S, t, ; \alpha_1, ..., \alpha_S\Big)$$

4. Neue Impulse

$$p'_j = \alpha_j = \text{const.}$$

   und neue Koordinaten:

$$\begin{aligned} q'_j &= \frac{\partial F_2}{\partial p'_j} = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_j} \\ &= q'_j(q_1, ..., q_S, t; \alpha_1, ..., \alpha_S) \\ &= \beta_j = \text{const.} \end{aligned} \tag{4.57}$$

5. Löse Gl. 4.57 nach den q_j auf ($j = 1, ..., S$):

$$q_j = q_j(t; \alpha_1, ..., \alpha_S, \beta_1, ..., \beta_S) = q_j(t; \vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

Dies ist die Lösung des ursprünglichen Problems (Bahnkurve).

6. Impulse:

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = p_j(\vec{q}, t; \vec{q})$$

aus 5., setze Bahnkurve $\vec{q}(t; \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ ein:

$$p_j = p_j(t; \vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

7. Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \vec{q}(t = 0; \vec{\alpha}, \vec{\beta}) &= \vec{q}_0 \\ \vec{p}(t = 0; \vec{\alpha}, \vec{\beta}) &= \vec{p}_0 \end{aligned}$$

Physikalische Bedeutung von F_2

$$\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{S} \Big(\underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial q_j}}_{= p_j} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial p'_j} \dot{p}'_j}_{= 0} \Big) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Die Lösung von Gl. 4.55 hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial q_j} &= p_j \\ \dot{p}'_j &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} &= \underbrace{H'}_{= 0} - H = -H \end{aligned}$$

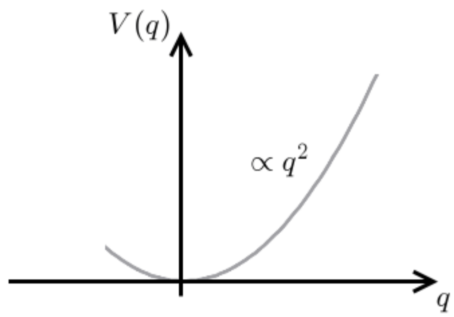
Einsetzen:

$$\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - H = L \tag{4.58}$$

F_2 ist Stammfunktion von L, integriere:

$$F_2 = \int L \, \mathrm{d}t + \text{const.} \tag{4.59}$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator



1.
$$H = \frac{p}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2$$

2.
$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

S: gesuchte erzeugende Funktion

$$\begin{aligned} H\Big(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\Big) + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial S}{\partial q}\Big)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

(partielle Differentialgleichung für $S(q,t)$)

3. Seperationsansatz: $S(q,t) = W(q) + V(t)$

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial W}{\partial q}\Big)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0 q^2}_{=f(q)} = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial t}}_{=g(t)}$$

Kann nur für alle t erfüllt sein, falls gilt:

$$\frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial W}{\partial q}\Big)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0 q^2 = \alpha = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= -\alpha \\ \Rightarrow V(t) &= -\alpha t + \text{const.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q} &= \sqrt{2m\alpha - m^2\omega_0^2 q^2} = m\omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} \\ W(q) &= m\omega_0 \int_0^q \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - \tilde{q}^2}\, \mathrm{d}\tilde{q} \end{aligned}$$

Mit
$$\int \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\big) + \text{const.}$$
folgt:

$$S(q,t,\alpha) = m\omega_0 \left[\frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} + \frac{\alpha}{m\omega_0^2} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2\alpha}}\right)\right] - \alpha t + \text{const.}$$

4. neue Impulse und Koordinaten

$$\begin{aligned} p' &= \alpha \\ q' &= \frac{\partial S}{\partial p'} = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{const.} = \beta \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{1}{\omega_0} \int \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - \tilde{q}^2}\, \mathrm{d}\tilde{q} - t = \frac{1}{\omega_0} \arcsin\left(q\omega\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\right) - t \qquad (*)$$

5. löse nach q auf

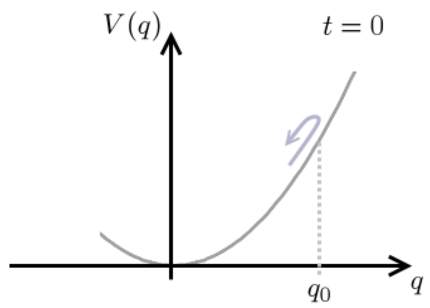
$$q = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\sin\big(\omega_0(t+\beta)\big) = q(t;\alpha,\beta)$$

6. Impulse:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q} \\ &= m\omega_0\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} \\ &= m\omega_0\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2}}\sqrt{1-\frac{m\omega_0^2}{2\alpha}q^2} \qquad (**) \\ &= \sqrt{2m\alpha}\sqrt{1-\sin^2\big(\omega_0(t+\beta)\big)} \\ &= \sqrt{2m\alpha}\cos\big(\omega_0(t+\beta)\big) \end{aligned}$$

7. Anfangsbedingungen ($t=0$): Wähle

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 = 0 \\ q(0) &= q_0 \neq 0 \end{aligned}$$



Benütze $(**)$:

$$\begin{aligned} p(0) &= 0 = \sqrt{2m\alpha}\sqrt{1-\frac{m\omega_0^2}{2\alpha}q_0^2} \\ \alpha &= \frac{m\omega_0^2}{2}q_0^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: $\alpha = E(=\text{Gesamtenergie})$
Benütze $(*)$ bei $t=0$:

$$\beta = \frac{1}{\omega_0}\arcsin\Big(\underbrace{q_0 m\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}}_{=1}\Big) = \frac{\pi}{2\omega_0}$$

Setze α,β in p, q ein um die vollständige Lösung zu erhalten:

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}\sin\big(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\big) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}\cos(\omega_0 t) \\ p &= \sqrt{2mE}\cos\big(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\big) = -\sqrt{2mE}\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Allgemeine Bemerkungen:
1) Separationsansatz immer dann, wenn $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.
Annahme skleronomer Zwangsbedingungen: $H = E$ ist ein Integral der Bewegunmg, E die erhaltene Gesamtenergie. Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$H\Big(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}\Big) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Ansatz:

$$S(\vec{q}, t) = W(\vec{q}) - Et$$

somit ist $H = E$ und die Zeitabhängigkeit eliminiert. Wir erhalten eine

„zeitunabhängige“ Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$H\Big(\vec{q}, \frac{\partial W}{\partial \vec{q}}\Big) = E \tag{4.60}$$

W heißt **hamiltonsche charakteristische Funktion**: Ihre physikalische Bedeutung (wie bei S):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{S}\Big(\frac{\partial W}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial W}{\partial p'_j}\dot{p}'_j\Big) = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j \\ \Rightarrow W &= \int \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j \mathrm{d}t = A \end{aligned}$$

A ist die verkürzte Wirkung, s. Maupertuis, Gl. 4.10.

2) Was haben wir gewonnen?

- Wir haben $2S$ gewöhnliche Differentialgleichungen ersetzt durch eine partielle Differentialgleichung in $S + 1$ Variablen.
- Allgemein sind partielle Differentialgleichungen schwieriger zu lösen als gewöhnliche.
- Ausnahme: seperable Probleme
- Nehme an, dass $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ Dann:

  $$S = W - Et$$

  Seperables Problem: eine Variable (z. B. q_1 und $\frac{\partial W}{\partial q_1}$ kommt in H als $f\Big(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\Big)$ vor. Dann ist

  $$H\Big(q_2, ..., q_S, \frac{\partial W}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_S}, f\Big(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\Big)\Big) = E$$

  Seperationsansatz:

  $$\begin{aligned} & W(\vec{q}) = \bar{W}(q_2, ..., q_S) + W_1(q_1) \\ \Rightarrow \quad & H\Big(q_2, ..., q_S, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_S}, f\Big(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\Big)\Big) = E \end{aligned}$$

  Für alle q_1 folgt

  $$f\Big(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\Big) = \text{const.} = C_1$$

und damit:

$$H\Big(q_2, ..., q_S, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_S}, C_1\Big) = E$$

Aus der partiellen Differentialgleichung in S Variablen wurde so eine gewöhnliche Differentialgleichung und eine partielle Differentialgleichung in $S-1$ Variablen.

Spezialfall für zyklisches q_1, also $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$:

$$\begin{aligned} f &= f\Big(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\Big) = \text{const.} = C_1 \\ \Rightarrow \mathrm{d}W_1 \mathrm{d}q_1 &= f^{-1}(C_1) = \alpha_1 \\ \Rightarrow W_1(q_1) &= \alpha_1 q_1 + \underbrace{\text{const.}}_{:=0} \end{aligned}$$

Der Seperationsansatz wird also:

$$W(\vec{q}) = \bar{W}(q_2, ..., q_S) + \alpha_1 q_1$$

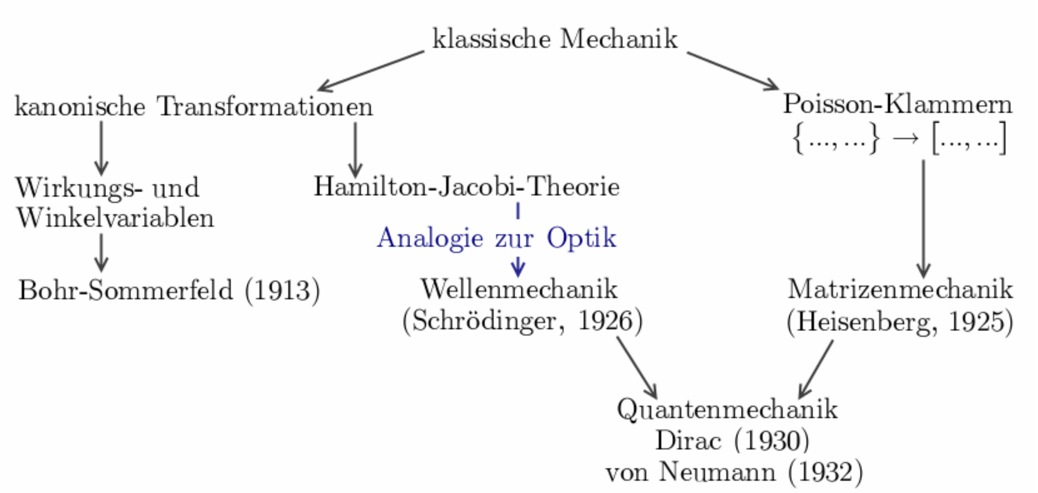
Im besten Fall:

$$W = \sum_{j=1}^{S} W_j(q_j)$$

Dies führt auf S gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$H_j\Big(q_j, \frac{\mathrm{d}W_j}{\mathrm{d}q_j}\Big) = \alpha_j$$

4.7 Übergang zur Wellenmechanik



Wellengleichung der klassischen Mechanik
Man nimmt an:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow H &= T + V = E = \text{const.} \end{aligned}$$

Wirkungsfunktion:

$$S(\vec{q}, \vec{p}\,', t) = W(\vec{q}, \vec{p}\,') - Et$$

Da $\vec{p}\,' = \text{const.}$ folgt, dass

$$W(\vec{q}) = \text{const.}\,,$$

also eine (hyperbolische) Fläche im Konfigurationsraum ist. Die Flächen bewegen sich als fortlaufende Wellenfronten:

$$S(\vec{q}, t) = \text{const.}$$

Hamilton-Jacobi: Ein Teilchen im $\mathbb{R}^3$: $\vec{q} = (x, y, z)$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{q})$$

Benutze:

$$\vec{p} \to \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, \ \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} = \nabla S(\vec{q})$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(\vec{q}) = -\frac{\partial S}{\partial t} = E \\ &(\nabla S)^2 = 2m\big(E - V(\vec{q})\big) =: \frac{E^2}{u^2} = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 \end{aligned}$$

$$(\nabla S)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 \tag{4.61}$$

und mit $S = W - Et$:

$$(\nabla W)^2 = \frac{E^2}{u^2} \tag{4.62}$$

Bemerkungen:

- Formulierung (fast) wie bei Lichtwellen
- Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

  $$u = \frac{|E|}{\sqrt{2m(E - V(\vec{q}))}} = u(\vec{q}) \tag{4.63}$$

  ist ortsabhängig!
- Analogie: Lichtausbreitung in einem Medium mit ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{r})$

Einschub: Lichtwellen mit $u(\vec{r})$ (→ Kapitel 1)
Die skalare Wellengleichung lautet mit $u = \frac{c}{n}$:

$$\boxed{\nabla^2\varphi + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0} \tag{4.64}$$

1) Lösung für $n = \text{const.}$:

$$\varphi = \varphi_0 \exp\big(-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\big)$$

Dispersionsrelation:

$$\omega = uk = \frac{c}{n}k = ck_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}c = 2\pi\nu$$

$$\boxed{\nu = \frac{c}{\lambda_0}} \tag{4.65}$$

2) $n = n(\vec{r})$
Ansatz:

$$\varphi = \exp\big(A(\vec{r}) + ck_0(L(\vec{r}) - ct)\big)$$

A bestimmt die Amplitude, für $n =$ const. folgt $A =$ const.. $L(\vec{r})$ nennt man Lichtweg oder Eikonal, $n =$ const. bedeutet, dass $L(\vec{r}) = n\hat{k}\cdot\vec{r}$. Dies setzt man in Gl. 4.64 ein, mit der Näherung, dass sich $n(\vec{r})$ nur schwach auf der Skala der Wellenlänge λ ändert ($\rightarrow$ geometrische Optik), woraus sich $\nabla A(\vec{r}) \approx 0$ ergibt:

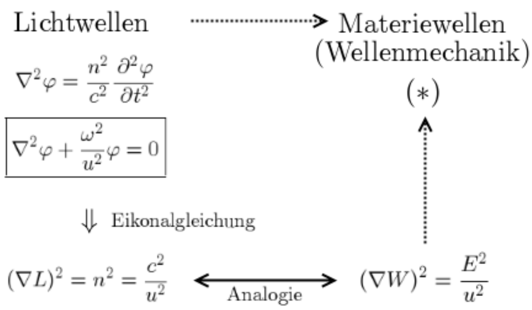
$$\nabla^2\varphi \approx -k_0^2\Big(\underbrace{\big(\nabla L(\vec{r})\big)^2}_{\text{Re}} + i\,\underbrace{k_0\nabla^2 L(\vec{r})}_{\text{Im}}\Big)\varphi = -\frac{n^2}{c^2}\omega^2\varphi$$

Betrachte den Realteil, dies ergibt die

Eikonalgleichung für die geometrische Optik:

$$\big(\nabla L(\vec{r})\big)^2 = \big(n(\vec{r})\big)^2 \tag{4.66}$$

Wellenoptik
Idee:



(∗)

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0$$

Dies ist die

Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{4.67}$$

mit dem

Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{q}) \tag{4.68}$$

Dispersionsrelation: Analog zu Gl. 4.65.

$$\nu = \frac{1}{\lambda_0}\,c \qquad \longleftrightarrow \qquad \nu = \frac{1}{h}E$$

h ist das Planck'sche Wirkungsquantum:

$$\begin{aligned} [h] &= \text{Energie} \cdot \text{Zeit} = \text{Wirkung} \\ h &= 6.6 \cdot 10^{-34}\,\text{Js} \\ \hbar &:= \frac{h}{2\pi} \end{aligned}$$

$$E = h\,\nu \tag{4.69}$$

$$\frac{\omega^2}{n^2u^2} = \left(\frac{2\pi\nu}{nu}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\frac{E^2}{u^2} \overset{(4.63)}{=} \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)$$

Literaturverzeichnis

[1] Wolfgang Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik*, Bände 2, 3 und 4

[2] Friedhelm Kuypers: *Klassische Mechanik*

[3] Herbert Goldstein: *Classical mechanics*

[4] Lev Landau, Evgenij Lifshitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik: Mechanik*