UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 8
(Ausgabe: 04.12.2008, Abgabe: 11.12.2008, Besprechung: 15.12.+16.12.2008)

Aufgabe 27 : Kovariante Formulierung der Lorentzkraft (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die kovariante Bewegungsgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}u^\nu}{\mathrm{d}\tau} = qF^{\nu\mu}u_\mu$$

die Lorentzkraft enthält. Da es sich um eine vierkomponentige Gleichung handelt, erhalten Sie noch eine weitere Gleichung. Leiten Sie aus dieser eine Erhaltungsgröße ab. Nehmen Sie dazu an, dass das elektrische Feld $\mathbf{E}$ von einem zeitunabhängigen Potential ϕ erzeugt wird und schreiben Sie damit die rechte Seite als Zeitableitung.

Aufgabe 28 : Spin und Helizität (8 Punkte)

Für relativistische Teilchen ist der Spinoperator $\frac{\hbar}{2}\mathbf{\Sigma}$ gegeben durch[1]

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{ijk}\Sigma^k \text{ mit } \sigma_{ij} = \sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j].$$

a) Berechnen Sie die Komponenten von $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_z)$ sowie von $(\frac{\hbar}{2}\mathbf{\Sigma})^2$.

b) Der Helizitätsoperator ist gegeben durch

$$h = \mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \Sigma_i \hat{k}^i,$$

wobei $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ den Einheitsvektor in Richtung der räumlichen Bewegung kennzeichnet. Zeigen Sie, dass falls die Diracgleichung durch die Wellenfunktion der Form $\psi(x) = e^{i(k^0x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\chi = e^{ikx}\chi$ erfüllt wird, so wird sie auch durch $h\psi(x)$ erfüllt.

---

[1] *Standarddarstellung der γ-Matrizen :*

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenschaften

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = 2g^{\nu\mu}\mathbb{1}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

c) Im Gegensatz zum nichtrelativistischen Grenzfall kann der Spin eines sich frei bewegenden masselosen Teilchens nicht beliebig ausgerichtet sein, sondern nur parallel (Helizität +1), oder antiparallel (Helizität -1) zur Bewegungsrichtung. Zeigen Sie, dass für einen freien masselosen Fermionenzustand ψ mit positiver Energie gilt : $h\psi = \gamma^5\psi$. Multiplizieren Sie dazu die Diracgleichung mit $\gamma^5\gamma^0$.

Anmerkung : Wenn sich die physikalischen Eigenschaften eines Teilchens mit der Helizität andern, so spricht man von Chiralität. So zeigt sich z.B. experimentell, dass nur Neutrinos mit negativer Helizität, d.h. Eigenwert $h = -1$ existieren.

Aufgabe 29 : Lösung der Dirac-Gleichung für freie Teilchen (8 Punkte)

Die freie Dirac-Gleichung ist gegeben durch[2]

$$(-i\partial\!\!\!/ + \frac{mc}{\hbar})\psi = 0. \tag{1}$$

Zur Lösung wählen wir folgenden Ansatz

$$\psi_r^{(+)}(x) = u_r(k)e^{-ikx} \quad \text{(Lösungen positiver Energie)} \tag{2}$$
$$\psi_r^{(-)}(x) = v_r(k)e^{+ikx} \quad \text{(Lösungen negativer Energie)} \tag{3}$$

mit $r \in \{1, 2\}$, $k^0 = |E|/\hbar c > 0$ und $p^\nu = \hbar k^\nu = (E/c, \mathbf{p})$.
Da eine direkte Lösung mühsam ist, nutzen wir die Eigenschaften der γ-Matrizen sowie die Dispersionsrelation $E^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4$ im Folgenden geschickt aus.

a) Bestimmen Sie die Wellenfunktionen für ein ruhendes Teilchen aus der Schrödingerform der Diracgleichung. Wählen Sie dabei die Spinoren $u_1(0) = (1, 0, 0, 0)^T$, $u_2(0) = (0, 1, 0, 0)^T$, $v_1(0) = (0, 0, 1, 0)^T$ und $v_2(0) = (0, 0, 0, 1)^T$.

b) Zeigen Sie, dass $k\!\!\!/ k\!\!\!/ = k_\mu k^\mu$ und damit $(\hbar k\!\!\!/ \pm mc)(\hbar k\!\!\!/ \mp mc) = 0$.

c) Überzeugen Sie sich, dass aus dem Ergebnis b) folgt, dass die Spinoren $u_r(k)$ und $v_r(k)$ für endliche Impulse direkt gegeben sind durch

$$u_r(k) = \frac{c}{N}(\hbar k\!\!\!/ + mc)u_r(0), \quad v_r(k) = \frac{c}{N}(-\hbar k\!\!\!/ + mc)v_r(0) \tag{4}$$

mit einer noch zu bestimmenden Normierung N.

d) Um Gleichung (4) auszuwerten und die 4er-Spinoren für endliche Impulse explizit zu bestimmen, schreiben Sie die 4er-Spinoren als

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\chi}_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_r(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\chi}_r \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit $\boldsymbol{\chi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\chi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und rechnen so mit 2x2-Matrizen. Verwenden Sie die Standarddarstellung der γ-Matrizen.

e) Die Normierung soll so gewählt werden, dass die Spinoren $u_r(k)$ und $v_r(k)$ orthonormal sind, also dass gilt[3] :

$$\bar{u}_r(k)u_s(k) = \delta_{rs}, \quad \bar{v}_r(k)v_s(k) = -\delta_{rs}, \quad \bar{u}_r(k)v_s(k) = 0. \tag{6}$$

Hinweis : Demonstrieren Sie, dass $\bar{u}_r(k) = u_r^\dagger(k)\gamma^0 = c\bar{u}_r(0)(\hbar k\!\!\!/ + mc)/N$, sowie dass $\bar{u}_r(0)\gamma^i u_s(0) = 0$ und analog für $\bar{v}_r(k)$.

[2] Der *Feynman-Slash*, auch *Feynman-Dagger* genannt, ist definiert durch $a\!\!\!/ = \gamma^\mu a_\mu$.
[3] Der *adjungierte* Spinor $\bar{u}$ ist definiert durch $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$. $u^\dagger$ wird *hermitesch adjungierter* Spinor genannt.