UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 7

(Ausgabe: 27.11.2008, Abgabe: 04.12.2008, Besprechung: 08.12.+09.12.2008)

Aufgabe 23 : Längenkontraktion (4 Punkte)

Der Übergang von einem Inertialsystem IS [Koordinaten $x^\mu = (ct, x, y, z)$] zu einem relativ dazu mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x = c\beta\mathbf{e}_x$ bewegten System IS' [Koordinaten $x'^\mu = (ct', x', y', z')$] wird beschrieben durch den sog. *Lorentz-Boost*

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu$$

mit

$$\Lambda^\mu_{\ \nu} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\beta^2} & -\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \\ -\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im System IS befinde sich ein Stab der Länge L, der entlang der x-Achse ausgerichtet sei. Ein vorbeifliegender Beobachter im System IS' messe die Länge des Stabes, indem er dessen Anfang und Ende zur gleichen Zeit bestimmt. Wie groß ist die Länge L'?

Aufgabe 24 : Eigenschaften der Lorentz-Transformation (6 Punkte)

Die allgemeine Lorentz-Transformation in der 4d-Raumzeit $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu$ wird beschrieben durch eine reelle 4x4-Matrix $\Lambda = (\Lambda^\mu_{\ \nu})$, deren Elemente die Gleichung $g_{\kappa\lambda}\Lambda^\kappa_{\ \mu}\Lambda^\lambda_{\ \nu} = g_{\mu\nu}$ erfüllen.

a) Es seien $\Lambda^{\ \mu}_{1\ \nu}$ und $\Lambda^{\ \mu}_{2\ \nu}$ zwei Lorentz-Transformationen. Zeigen Sie, dass dann auch die Kombination $\Lambda^{\ \mu}_{3\ \nu} = \Lambda^{\ \mu}_{1\ \kappa}\Lambda^{\ \kappa}_{2\ \nu}$ eine Lorentz-Transformation ist.

b) Berechnen Sie die möglichen Werte für die Determinante von $\Lambda^\mu_{\ \nu}$.

c) Finden Sie eine Formel, welche die inverse Lorentz-Transformation $(\Lambda^{-1})^\mu_{\ \nu}$ durch Heben und Senken der Indizes mit $\Lambda^\mu_{\ \nu}$ verbindet.

d) Zeigen Sie, dass die Lorentz-Transformationen eine Gruppe bilden.

Aufgabe 25 : Addition von Geschwindigkeiten (5 Punkte)

Führt man zwei spezielle Lorentz-Transformationen, deren Geschwindigkeitsvektoren nicht in die gleiche Richtung zeigen, hintereinander aus, so ergibt sich eine spezielle Lorentz-Transformation mit einer zusätzlichen Raumdrehung. Im Folgenden nehmen wir an, das die erste Transformation in z-Richtung und die zweite senkrecht dazu in x-Richtung erfolgt.

a) Ermitteln Sie die Matrix $T^{\mu}_{\ \nu}$ der resultierenden Transformation durch Ausführung der beiden speziellen Transformationen mit den Geschwindigkeiten v in z-Richtung und u in x-Richtung. Stellen Sie die resultierende Transformation durch eine spezielle Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $\mathbf{w}$ und einer Drehung um den Winkel α, d.h. $T = R(\alpha)L(\mathbf{w})$ dar und zeigen Sie, dass

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{u^2 + v^2 - \frac{u^2 v^2}{c^2}}. \tag{1}$$

Hinweis : Die Drehung ändert bestimmte Komponenten von T nicht.

b) Ist das Ergebnis (1) symmetrisch in u und v? Ergibt sich das selbe Ergebnis, wenn man erst in x- und dann in z-Richtung transformiert? Welche Koordinatentransformation verhält sich genauso.

c) Eine spezielle Lorentz-Transformation in $\mathbf{w}$-Richtung erhält man aus der bekannten Transformation in z-Richtung, indem man zuerst das Koordinatensystem so dreht, dass $\mathbf{w}$ parallel zu z liegt, danach entlang z transformiert, und dann die Drehung rückgängig macht. Zeigen Sie, dass sich damit ergibt (y-Komponente vernachlässigt) :

$$L(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(w) & \gamma(w)\frac{w_x}{c} & \gamma(w)\frac{w_z}{c} \\ \gamma(w)\frac{w_x}{c} & 1 + (\gamma(w) - 1)\frac{w_x^2}{w^2} & (\gamma(w) - 1)\frac{w_x w_z}{w^2} \\ \gamma(w)\frac{w_z}{c} & (\gamma(w) - 1)\frac{w_x w_z}{w^2} & 1 + (\gamma(w) - 1)\frac{w_z^2}{w^2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26 : Lorentz-Transformation von elektrischen Feldern (5 Punkte)

Man betrachtet uniforme und konstante elektromagnetische Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ in einem Bezugssystem $\mathcal{R}$.

a) Finden Sie einen Bezugssystem $\mathcal{R}'$ in dem für die transformierten elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$ gilt, dass $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}'$.

b) Hat dieses Problem immer eine Lösung? Wenn ja, ist sie eindeutig?

c) Geben Sie die Beträge von E' und B' in dem Bezugssystem $\mathcal{R}'$ an.

Hinweise :

1. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ ist eine Invariante der Lorentz-Transformation.
2. Man braucht nur zwei Fälle zu unterscheiden. Ein Boost in der Ebene von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ und einen Boost senkrecht dazu.