UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 6
(Ausgabe: 20.11.2008, Abgabe: 27.11.2008, Besprechung: 01.12.+02.12.2008)

Aufgabe 19 : Übungen zur kovarianten Schreibweise (Präsenzübung)

In der kovarianten Notation fasst man die Zeit- und Raumvariablen zu einem Viererortsvektor[1] $x^\nu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{x})$ und Energie und Impuls zum Viererimpuls $p^\nu = (p^0 = E/c, \mathbf{p})$ zusammen. Desweiteren definiert man den kovarianten Gradientenvektor

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(Man beachte die Stellung der Indizes). Der metrische Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

überführt einen kontravarianten Vektor $b^\nu = (b^0, b^1, b^2, b^3)$ in den Kovarianten $b_\mu = g_{\mu\nu} b^\nu = (b^0, -b^1, -b^2, -b^3)$, also auf gut deutsch : $g_{\mu\nu}$ "loweres" und $g^{\mu\nu}$ "raises" den Summationsindex. Hierbei wird die Einstein-Summenkonvention[2] verwendet.

a) Berechnen Sie $x_\nu x^\nu$, $p_\nu p^\nu$ und $g_{\nu\lambda}\partial^\lambda \partial^\nu$.

b) Was unterscheidet einen beliebigen Tensor zweiter Stufe $G_{\mu\nu}$ von dem Tensor $G^{\mu\nu}$? Was bedeutet dies insbesondere für die metrischen Tensoren $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$?

c) Bestätigen Sie, dass g mit gemischten Indizes das Kronecker-Delta darstellt, d.h. z.B. $g^{\nu}{}_{\mu} = \delta^{\nu}{}_{\mu}$.

---

[1] Lateinische Indizes laufen von 1 bis 3, d.h. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Griechische Indizes von 0 bis 3, d.h. $x = x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$

[2] *Einstein-Summenkonvention* : Über zwei gleiche (ein oberer und ein unterer) Indizes wird summiert. Falls gleiche Indizes oben oder unten auftauchen, dann hat man im Allgemeinen einen Fehler gemacht ☹.

Aufgabe 20 : Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen (8 Punkte)

Analog zum Viererort und -impuls definiert man die Viererstromdichte $j^\nu = (c\rho, \mathbf{j})$ und das Viererpotential $A^\nu = (\Phi/c, \mathbf{A})$. Desweiteren führt man den antisymmetrischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ein :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die zwei homogenen Maxwellgleichungen gegeben sind durch

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

b) Überprüfen Sie, dass die zwei inhomogenen Maxwellgleichungen enthalten sind in

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Gehen Sie wie folgt vor :

i) Berechnen Sie $F_{\mu\nu}$ aus $F^{\mu\nu}$.

ii) Was passiert bei einer Permutation von μ, ν und λ?

iii) Überlegen Sie sich den Fall zweier gleicher Indizes, z.B. $\mu = \nu$.
Hinweis : $F^{\lambda\nu} = -F^{\nu\lambda}$

iv) Behandeln Sie explizit die übrigen 4 Fälle.

Aufgabe 21 : Kovariante Elektrodynamik (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ invariant unter der Transformation

$$A^\nu \to A^\nu + \partial^\nu \Lambda$$

ist, wobei Λ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist. Wie nennt man eine solche Eigenschaft/Transformation?

b) Berechnen Sie den Ausdruck $\partial_\mu j^\mu$. Schreiben Sie die entstehende Gleichung in die Darstellung mit ∇ und ∂_t um. Welcher physikalische Sachverhalt wird hiermit beschrieben?

Aufgabe 22 : Klein-Gordon-Gleichung mit elektrischem Potential (8 Punkte)

Gegeben ist die kräftefreie *Klein-Gordon-Gleichung*

$$\left[\partial_\nu \partial^\nu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0.$$

Die Kopplung an das elektromagnetische Feld $A^\nu = (\Phi/c, \mathbf{A})$ geschieht mittels der sogenannten *minimalen Kopplung* $i\hbar\partial_\nu = p_\nu \to p_\nu - eA_\nu$.

a) Benutzen Sie den Ansatz $\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) e^{-iEt/\hbar}$, um die Klein-Gordon-Gleichung mit einem zeitunabhängigen, nur elektrischen Potential Φ in die folgende Form zu bringen :

$$(E - e\Phi)^2 \psi(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4\right] \psi(\mathbf{x}). \tag{1}$$

b) Fall Φ ortsunabhängig ist, dann ist $\psi(\mathbf{x})$ ein Impulseigenzustand und der Operator $\hat{\mathbf{p}}$ kann durch den Eigenwert ersetzt werden. Leiten Sie unter dieser Bedingung aus Gleichung (1) die erste relativistische Korrektur der kinetischen Energie, die sog. *relativistische Massenkorrektur* her.

Anmerkung : Falls Φ nicht-trivial ortsabhängig ist, so ergeben sich noch weitere Korrekturen in der Ordnung $1/mc^2$, insbesondere der *Darwin-Term* $\sim \nabla^2 \Phi$ und (für spinbehaftete Teilchen) die *Spin-Bahn-Kopplung* $\sim \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}r$.