UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 4
(Ausgabe: 06.11.2008, Abgabe: 13.11.2008, Besprechung: 17.11.+18.11.2008)

Aufgabe 12 : Harmonischer Ozillator (Präsenzaufgabe)

Der harmonische Oszillator wird beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2.$$

Zur Lösung des Problems definieren wir die Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a} = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}.$$

a) Zeigen Sie die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.$$

b) Schreiben Sie den Hamiltonian um in

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right).$$

c) Überprüfen Sie die Operatoridentitäten

$$[\hat{a}, \hat{n}] = \hat{a}, \quad [\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger.$$

d) Der Operator $\hat{n}$ habe die Eigenvektoren $|n\rangle$, d.h. $\hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$. Folgern Sie aus den Operatoridentitäten aus c), dass

$$\hat{a}\,|n\rangle = c\,|n-1\rangle$$

mit $c \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie c mit Hilfe der Normierung.

e) Zeigen Sie analog

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,.$$

Aufgabe 13 : Bosonisierung des Spins (8 Punkte)

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ erfüllen die bosonische Vertauschungsrelationen $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}] = 0$ und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Operatoren die Drehimpulsalgebra in der Form $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$ und $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$ erfüllen :

$$\hat{L}_z = \hbar(l - \hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad \hat{L}_+ = \hbar\sqrt{2l - \hat{a}^\dagger\hat{a}} \cdot \hat{a}, \quad \hat{L}_- = \hbar\hat{a}^\dagger\sqrt{2l - \hat{a}^\dagger\hat{a}}.$$

b) Berechnen Sie $\hat{\mathbf{L}}^2$ und interpretieren sie die Variable l.

c) *Physikalischer Kontext* : Angenommen, man würde einen Ferromagneten als großen Spin beschreiben. Welche Quasiteilchen würden dann von den Operatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ erzeugt/vernichtet? Erhöhen oder verringern diese Quasiteilchen die Magnetisierung?

Anmerkung : Diese Darstellung der Drehimpulsoperatoren geht auf T. Holstein und H. Primakoff zurück (Phys. Rev. **58**, 1098 (1940)).

Aufgabe 14 : Fermionische Teilchendarstellung von Operatoren (5 Punkte)

Für einen komplexen Operator $\hat{T}$ definieren wir

$$A(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \hat{a}_\alpha^\dagger T_{\alpha\beta}\hat{a}_\beta$$

mit der $n \times n$ Matrixdarstellung $T_{\alpha\beta} = \langle\alpha| T |\beta\rangle$.

a) Leiten Sie zuerst folgende Relation her :

$$[X, YZ] = \{X, Y\}Z - Y\{X, Z\}.$$

b) Zeigen Sie dann

$$[A(s), A(t)] = A([s, t]).$$

c) Benutzen Sie a) und b), um zu bestätigen, das der Spin-1/2-Operator in Teilchendarstellung

$$\hat{S}_k = \frac{\hbar}{2}\sum_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \sigma_{i,j}^k \hat{a}_j$$

mit den Pauli-Matrizen σ^k ($k \in \{x, y, z\}$), die Drehimpulsalgebra $[\hat{S}_k, \hat{S}_l] = i\hbar\sum_m \epsilon_{klm}\hat{S}_m$ erfüllt.

Hinweis : Sie können benutzen, dass die Pauli-Matrizen ebenfalls eine Drehimpuls-Algebra erfüllen.

Aufgabe 15 : Kohärente Zustände (7 Punkte)

a) Betrachten Sie ein bosonisches System mit N Freiheitsgraden.

i) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\phi\rangle = e^{\sum_{i=1}^{N} \phi_i\hat{a}_i^\dagger} |0\rangle$$

ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators $\hat{a}_j |\phi\rangle = \phi_j |\phi\rangle$ mit dem Eigenwert ϕ_j ist.

ii) Ein adjungierter Zustand ist damit gegeben durch

$$\langle\psi| = \langle 0|\, e^{\sum_{j=1}^{N} \psi_j^* \hat{a}_j}.$$

Bestimmen Sie den Überlapp $\langle\psi|\phi\rangle$ zweier kohärenter Zustände.

iii) *Holomorphe Darstellung* : Zeigen Sie, dass die Wirkung der Leiteroperatoren gegeben ist durch

$$\langle\phi|\, \hat{a}_j\, |\chi\rangle = \frac{\partial}{\partial\phi_j^*} \langle\phi|\chi\rangle\,, \quad \langle\phi|\, \hat{a}_j^\dagger\, |\chi\rangle = \psi_j^* \langle\phi|\chi\rangle\,.$$

Welche Vertauschungsrelation erfüllen $\frac{\partial}{\partial\phi_j^*}$ und ϕ_j^*?

b) Betrachten Sie ein fermionisches System mit einem Freiheitsgrad. Um hier einen kohärenten Zustand zu konstruieren, benötigen wir die sogenannten *Grassmann-Variablen.* Dies sind Zahlen, die mit sich selbst und allen fermionischen Operatoren antikommutieren, d.h.

$$\{\xi, \xi\} = \{\xi, \hat{b}\} = \{\xi, \hat{b}^\dagger\} = 0.$$

i) Überprüfen Sie, dass der Zustand $|\xi\rangle = e^{-\xi\hat{b}^\dagger}|0\rangle$ **kein Eigenzustand** des Vernichtungsopertors $\hat{b}$ ist, falls ξ eine komplexe Zahl ist.

ii) Überlegen Sie sich, warum jede Funktion von Grassmann-Variablen linear ist, d.h. $f(\xi) = f_0 + f_1\xi$.

iii) Zeigen Sie damit, dass, wenn ξ eine Grassmann-Variable ist, $|\xi\rangle = e^{-\xi\hat{b}^\dagger}|0\rangle$ ein kohärenter Zustand ist.