UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 3
(Ausgabe: 30.10.2008, Abgabe: 06.11.2008, Besprechung: 10.11.2008)

Aufgabe 8 : Teilchenzahldarstellung (Präsenzaufgabe)

Ein antisymmetrisierter fermionischer Basiszustand lässt sich ausdrücken als

$$|n_1, n_2, ...\rangle = \left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1} \left(\hat{a}_2^\dagger\right)^{n_2} \ldots |0\rangle \quad n_i \in 0, 1.$$

Der Vakuumzustand $|0\rangle$ ist definiert durch $\hat{a}_i |0\rangle = 0$ $(\forall i)$, wobei für die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die folgenden Vertauschungsrelationen gelten:

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij} \;\text{ und }\; \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = \{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen, dass $n_i \in \{0, 1\}$ $(\forall i)$. Wie nennt man diese Eigenschaft?

b) Der *Teilchenzahloperator* ist definiert durch $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen :

i) $\hat{n}_i |n_1, n_2, ..., n_i, ...\rangle = n_i |n_1, n_2, ..., n_i, ...\rangle$

ii) $[\hat{n}_i, \hat{a}_j] = -\hat{a}_j \delta_{ij}$, $[\hat{n}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \hat{a}_j^\dagger \delta_{ij}$

iii) $[\hat{n}_i, \hat{n}_j] = 0$

iv) $\hat{n}_i^2 = \hat{n}_i$ $(\forall i)$

Aufgabe 9 : Greensche Funktion der stationären Schrödingergleichung (7 Punkte)

a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf die Form

$$\left(\Delta + k^2\right) \psi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}). \tag{1}$$

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, definiert durch

$$\left(\Delta + k^2\right) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

zur Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (1).

Hinweise :

- Finden Sie zuerst eine Darstellung der Fourier-transformierten Greensfunktion $G(\mathbf{q})$.
- Verwenden Sie $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ als Polarachse.
- Bringen Sie $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ auf die Form

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{i}{8\pi^2 R} \left(D_+ + D_- \right).$$

- Benützen Sie den Residuensatz, um $D_\pm$ zu bestimmen.

Aufgabe 10 : Partialwellenzerlegung einer ebenen Welle (7 Punkte)

Entwickeln Sie die ebene Welle e^{ikz} in eine Reihe von Partialwellen nach der Drehimpulsquantenzahl l. Ebene Wellen sind bekanntermaßen Lösungen der Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen. Man kann das System aber auch als Zentralkraftproblem mit verschwindendem Potential auffassen. Beginnen Sie mit eben diesem Ansatz.

Hinweise:

- Die Differentialgleichung $\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1\right) f_l(\rho) = 0$ heisst Besselsche Gleichung. Die Lösungen sind sphärische Besselfunktionen $j_l(\rho)$ (und Neumannfunktionen, welche aber im Ursprung singulär sind).
- Für $r \to \infty$ gilt $j_l(\rho) \sim \frac{1}{\rho}\sin(\rho - l\frac{\pi}{2})$.
- Für die Legendre-Polynome gilt $\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x P_l(x) P_n(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ln}$.
- Es gilt ferner $P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$.

Aufgabe 11 : Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt. (6 Punkte)

Finden Sie die Streuamplitude und den totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem zentralsymmetrischen Potential :

$$U(r) = U_0 \mathrm{e}^{-r^2/R^2}$$

Geben Sie den Bereich der Anwendbarkeit der *Bornschen Näherung* an.

Hinweise :

Die Bornsche Näherung gilt, wenn $\psi_{\text{out}} \sim \psi_{\text{in}}$. Um den Wirkungsquerschnitt der Streuung abzuleiten haben wir angenommen, dass

$$\psi_{\text{out}} \simeq \psi_{\text{in}} + \psi^{(1)} \tag{2}$$

mit $|\psi^{(1)}| \ll |\psi_{in}| = 1$.

Für den Fall $ka \ll 1$ können die oszillierenden Terme von $|\psi^{(1)}|$ vernachlässigt werden. Außerdem kann das Potential durch

$$U(r) \approx \begin{cases} U_0 & r < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

genähert werden. Zeigen Sie, dass man damit auf $|\psi^{(1)}| \sim \frac{mR^2}{\hbar^2} U_0$ kommt, und schreiben Sie Bedingung (2) als Funktion von U_0.