UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 11
(Ausgabe: 15.01.2009, Abgabe: 22.01.2009, Besprechung: 26.01.+27.01.2009)

Aufgabe 34 : Chiralität und Neutrinos (Präsenzaufgabe)

a) Für die Betrachtung von Dirac-Teilchen ohne Masse ist es vorteilhaft in die *chirale Darstellung* der γ-Matrizen überzugehen. Bestimmen Sie ausgehend von der Standarddarstellung der Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

und der unitären Matrix

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{1} + \gamma^0 \gamma^5 \right)$$

die *chirale Darstellung* $\gamma_{\mathrm{ch}} = U^\dagger \gamma U$ der γ-Matrizen.

b) Zeigen Sie, dass $\Pi_{\mathrm{L/R}} = \frac{\mathbb{1} \mp \gamma^5_{\mathrm{ch}}}{2}$ Projektoren sind und bestimmen Sie deren Wirkung auf den Spinor $\psi_{\mathrm{ch}} = \begin{pmatrix} \varphi_{\mathrm{ch}} \\ \chi_{\mathrm{ch}} \end{pmatrix} = U^\dagger \psi$. Wie sehen damit die Eigenvektoren des Chiralitätsoperators γ^5_{ch} in der chiralen Basis aus? Welche Chiralität (entspricht Helizität für masselose Teilchen) haben damit die Komponenten des Spinors?

c) Wie das Goldhaber-Experiment[1] zeigte, treten Neutrinos nur mit negativer Chiralität (und Anti-Neutrinos mit postiver Chiralität) auf. Zeigen Sie, dass damit die Parität verletzt ist, d.h. dass bei einer Paritätstransformation Neutrinos mit positiver Chiralität auftauchen. Die Paritätsverletzung wurde bereits 1956 in dem berühmten Experiment von Frau Wu[2] nachgewiesen.

[1] M. Goldhaber, L. Grodzins and A. W. Sunyar, Helicity of the Neutrino, Phys. Rev. 109, 1015 (1958)
[2] C. S. Wu et al., Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay, Phys. Rev. 105, 1413 (1957)

Aufgabe 35 : Lagrangian- und Hamiltonian-Dynamik (10 Punkte)

Wie für die klassische Mechanik gibt es in der Feldtheorie eine Lagrangefunktion, von der die Bewegungsgleichungen der Felder abgeleitet werden können. Man definiert die Lagrangedichte von einem Feld als

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(\varphi(t,\,\mathbf{x}), \partial_\mu \varphi(t,\,\mathbf{x})\right) \tag{1}$$

Die Langrangian ist definiert durch ein Volumenintegration

$$\mathcal{L} = \int_{D\,\subset\,\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \; \mathscr{L}\left(\varphi(t,\,\mathbf{x}), \partial_\mu \varphi(t,\,\mathbf{x})\right) \tag{2}$$

Die Bewegungsgleichungen sind durch die Euler-Lagrange Gleichungen gegeben :

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)}\right] = 0 \tag{3}$$

Betrachten Sie[3]

$$\mathscr{L}_D = \mathrm{i}\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{4}$$

wo Ψ ein Dirac Spinor ist, $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$. Die Felder Ψ und $\bar{\Psi}$ werden dabei unabhängig von einander betrachtet.

a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für das Dirac-Spinor-Feld durch die Dirac-Gleichung gegeben ist.

b) Berechnen Sie den Impuls von Ψ mittels

$$\pi(t,\,\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}}.$$

c) Berechnen Sie die Hamiltondichte

$$\mathscr{H} = \pi\dot{\varphi} - \mathscr{L}.$$

Aufgabe 36 : Darwin-Term (10 Punkte)

Berechnen Sie die Energie-Korrektur der Eigenzustände des Wasserstoffatoms in erster Ordnung aufgrund des *Darwin-Terms.*

a) Leiten Sie die den Darwin-Term für das elektrostatische Feld eines Atomkerns her. Gehen Sie von dem allgemeinen Darwin-Term

$$H_\mathrm{D} = -\frac{\hbar^2 e}{8m_0^2c^2}\nabla^2\phi(\mathbf{r})$$

aus. $\phi(\mathbf{r})$ bezeichnet dabei das elektrostatische Potential.

b) Beweisen Sie, dass nur die Energie-Eigenfunktionen mit $l = 0$ am Ursprung nicht verschwinden, d.h. $\psi_{nlm}(\mathbf{r} = 0) \propto \delta_{l,0}$.

c) Berechnen Sie die Energie-Korrektur in erster Ordnung aufgrund des Darwin-Terms in Abhängigkeit der Quantenzahlen n, l und m.

d) Bestimmen Sie die Korrektur des Energie-Eigenwerts[4] $E_{1,0,0}$ in eV und vergleichen Sie das Ergebnis mit $E_{2,0,0} - E_{1,0,0}$, d.h. mit dem Energieabstand des Grundzustandes zum ersten angeregten Zustand.

---

[3] $\hbar = c = 1$.

[4] Die Indizes der Energie-Eigenwerte entsprechen den Quantenzahlen $(n, l, m) = (1, 0, 0)$