UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 10
(Ausgabe: 08.01.2009, Abgabe: 15.01.2009, Besprechung: 19.01.+20.01.2009)

Aufgabe 31 : Nicht-relativistische Elektronen im Magnetfeld (7 Punkte)

Im nichtrelativistischen Grenzfall geht die Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines Magnetfeldes in die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\mathbb{1}\partial_t\psi = \left[\frac{\mathbb{1}}{2m}(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right]\psi$$

mit $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ über. Ferner ist $\boldsymbol{\sigma}$ der 3-komponentige Vektor der Pauli-Matrizen und $\mathbb{1}$ die 2x2-Einheitsmatrix. ψ beschreibt hier einen 2-er Spinor.
Wir verwenden im Folgenden die *Landau-Eichung* $\mathbf{A} = (0, x|\mathbf{B}|, 0)$ und betrachten NUR eine Elektronenbewegung transversal zum Magnetfeld, d.h. $\partial_z\psi = 0$.

a) Berechnen Sie das Magnetfeld $\mathbf{B}$.

b) Verwenden Sie die Ansatz

$$\psi_{n,\sigma} = e^{-i\epsilon_{n,\sigma}t/\hbar}e^{-ik_y y}u_n(x)\chi_\sigma$$

mit den 2-komponentigen Spinoren $\chi_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\chi_- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenenergien von $u_n(x)$ indem Sie das Problem durch eine geeignete Koordinatentransformation auf den harmonischen Oszillator zurückführen.
Hinweis : Führen Sie die Zyklotronfrequenz $\omega = eB/m$ ein.

c) Zeigen Sie, dass die Energieniveaus der Elektronen gegeben sind durch

$$\epsilon_{n,\sigma} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}\right).$$

Bestimmen Sie die Zeeman-Energie $\Delta E = \epsilon_{n,-} - \epsilon_{n,+}$ und drücken Sie das Ergebnis durch das Bohr-Magneton $\mu_\mathrm{B} = e\hbar/2m$ aus.

Aufgabe 32 : Relativistische Elektronen im Magnetfeld (7 Punkte)

Die Dirac-Gleichung im kräftefreien Fall ist gegeben durch

$$\left(-i\partial\!\!\!/ + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0.$$

a) Koppeln Sie ein durch die Dirac-Gleichung beschriebenes Elektron an ein Feld $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$ an.

b) Zeigen Sie, dass unter der Bedingung $\partial_z\psi = 0$ die Dirac-Gleichung mit einem geeigneten Ansatz (siehe Aufgabe 31) geschrieben werden kann als

$$\begin{pmatrix} E - mc^2 & 0 & 0 & c(i\hbar\partial_x - im\omega x) \\ 0 & E - mc^2 & c(i\hbar\partial_x + im\omega x) & 0 \\ 0 & c(-i\hbar\partial_x + im\omega x) & -E - mc^2 & 0 \\ c(-i\hbar\partial_x - im\omega x) & 0 & 0 & -E - mc^2 \end{pmatrix}\psi = 0.$$

c) Bestimmen Sie die Eigenenergien der Spinoren, welche die Form

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzen.

d) Entwicklen Sie die Energien für den nichtrelativistischen Grenzfall.

e) Überlegen Sie sich grob, dass im nichtrelativistischen Grenzfall für positive Energie E die Komponenten ψ_1 und ψ_2, und für negative Energie E die Komponenten ψ_3 und ψ_4 den Spinor dominieren.

Aufgabe 33 : Spin-Bahn-Kopplung in Halbleitern (6 Punkte)

Zweidimensionale Elektronensysteme können experimentell in speziell geschichteten Halbleiterstrukturen realisiert werden. In diesen Systemen kann der Einfluß der atomaren Spin-Bahn-Kopplung auf das delokalisierte Elektron durch den folgenden zweidimensionalen Hamiltonian (*Rashba-Hamiltonian*) beschrieben werden :

$$H_\mathrm{R} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{\alpha}{\hbar}(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x).$$

Der Parameter α ist nur ungleich Null, wenn das System asymmetrisch bezüglich der Ebene des zweidimensionalen Elektronensystems ist. In dem Fall hängt α von den Eigenschaften des Materials und der Struktur der Probe ab.

a) Lösen Sie das Eigenwertproblem des Rashba-Hamiltonian. Beginnen Sie mit dem Ansatz ebener Wellen $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y)}$, und der Schrödinger-Gleichung. Berechnen Sie die beiden unterschiedlichen Energie-Eigenwerte zu dem gegebenen Wellenvektor (k_x, k_y) und berechnen Sie die $(a, b)^T$-Spinoren zu den Energie-Eigenwerten.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Spin-Vektors $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ in den beiden Energie-Eigenzuständen für einen festen Wellenvektor (k_x, k_y). Verwenden Sie die normierten Wellenfunktionen.

Hinweis: In a) und b) kann es hilfreich sein, Polarkoordinaten (k, φ_k) für den Wellenvektor einzuführen.