UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 1
(Ausgabe: 20.10.2008, Abgabe: 23.10.2008, Besprechung: 27.10.2008)

Aufgabe 1 : Drehimpulsalgebra (Präsenzaufgabe)

a) Zeigen Sie, dass für einen Drehimpuls $\hat{\mathbf{L}}$ gilt :

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{L}}] = 0.$$

Hinweis : Sie können benutzen, dass für die Komponenten von $\hat{\mathbf{L}}$ gilt $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\hat{L}^2$ nicht negativ sein können.

c) Zeigen Sie, dass für zwei Drehimpulse $\hat{\mathbf{s}}_1$ und $\hat{\mathbf{s}}_2$ mit den Leiteroperatoren $\hat{s}_{j,\pm} = \hat{s}_{j,x} \pm i\hat{s}_{j,y}$ ($j = \{1, 2\}$) gilt:

$$\hat{s}^2 = (\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2)^2 = \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + 2\hat{s}_{1,z}\hat{s}_{2,z} + \hat{s}_{1,+}\hat{s}_{2,-} + \hat{s}_{1,-}\hat{s}_{2,+}.$$

Aufgabe 2 : Kopplung zweier Spins (Präsenzaufgabe)

Zur Beschreibung von Systemen mit 2 Elektronen (z.B. neutrales Heliumatom, H_2-Molekül) betrachten wir die Kopplung von 2 Spin-$\frac{1}{2}$-Systemen.

a) Welche Dimension hat der Produktraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ des Systems? Stellen Sie eine einfache Basis von $\mathcal{H}$ für zwei Spin-$\frac{1}{2}$-systeme $\mathcal{H}^{(1)}$ und $\mathcal{H}^{(2)}$ mit den Basen $\{|\uparrow^{(1)}\rangle, |\downarrow^{(1)}\rangle\} \subset \mathcal{H}^{(1)}$, $\{|\uparrow^{(2)}\rangle, |\downarrow^{(2)}\rangle\} \subset \mathcal{H}^{(2)}$ auf.

b) Bestimmen Sie durch Anwendung der Leiteroperatoren des Gesamtspins alle orthogonalen Eigenzustände von $s^2 = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)^2$. Welche Symmetrieeigenschaften bzgl. Teilchenaustausch haben diese Zustände?

c) Die Gesamtwellenfunktion des Systems, bestehend aus Spin- und Ortswellenfunktion, muß antisymmetrisch gegenüber Teilchenaustausch sein. Welche Kombinationen an Spin- und Ortswellenfunktion sind damit möglich? Ordnen Sie die Begriffe *Singlett*- und *Triplett*-Zustände zu.

d*) Skizzieren sie das Termschema von Helium für die Hauptquantenzahlen $n_1 = 1$, $n_2 = 1, 2$. Trennen Sie die möglichen Zustände nach den Werten des Gesamtspins, d.h. in Triplett- und Singulettzustände. Geben Sie jeweils die entsprechende Notation $(n_2\,{}^{2S+1}L_J)$ der Zustände an. Erklären Sie die Energieunterschiede (Grob- und Feinstruktur) der einzelnen Zustände.

Aufgabe 3 : Clebsch-Gordan-Koeffizienten (10 Punkte)

Berechnen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten :

$$\langle l_1 = 1,\, l_2 = \frac{3}{2},\, m_1, m_2 | l_1 = 1,\, l_2 = \frac{3}{2},\, j = l_1 + l_2 = \frac{5}{2},\, m = m_1 + m_2 \rangle$$

für $-\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Hinweise :

- Starten Sie mit dem Zustand $|l_1 = 1,\, l_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{5}{2}, m = \frac{5}{2}\rangle$ und benutzen Sie den Absteige-operator $\hat{j}_-$, um den Zustand $|l_1 = 1,\, l_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{5}{2},\, m = \frac{3}{2}\rangle$ zu bekommen. Es gilt

$$\hat{j}_\pm \, |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |j, m \pm 1\rangle \,.$$

- Der Überlapp mit $\langle l_1 = 1,\, l_2 = \frac{3}{2},\, m_1,\, m_2|$ ergibt die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

- Beachten Sie, dass die Clebsch-Gordan-Koeffizienten symmetrisch sind, d.h.

$$C^{j,m}_{l_1,m_1,l_2,m_2} = C^{j,m}_{l_1,-m_1,l_2,-m_2}.$$

Wenden Sie die Tatsache an, dass $\langle l_1,\, l_2,\, j, m | l_1,\, l_2,\, j', m'\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{m,m'}$, um die Clebsch-Gordan Koeffizienten

$$\langle l_1 = 1,\, l_2 = \frac{3}{2},\, m_1, m_2 | l_1 = 1,\, l_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{3}{2},\, m = \frac{3}{2}\rangle$$

zu berechnen.

Aufgabe 4 : Spin-Orbit-Kopplung (10 Punkte)

Ein gebundenes Elektron bewegt sich im elektrostatischen Feld des Kerns. Da es ein intrinsisches magnetisches Moment besitzt, kommt es zu einer Wechselwirkung zwischen dem Spin $\mathbf{s}$ und dem Bahndrehimpuls $\mathbf{l}$. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall $l = 1$.

a) Drücken Sie die Zustände $|l, s, J, M\rangle$ in der Basis des Gesamtdrehimpulses durch die Zustände $|l, m_l, s, m_s\rangle$ aus. Zu diesem Behufe, schlagen Sie die *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* in einer Tabelle[1] nach und berechnen Sie diese zusätzlich mit der Methode aus Aufgabe 3.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung des Gesamtdrehimpulses $\hat{\mathbf{j}}^2$ in der Basis $\{l, m_l, s, m_s\}$.

Hinweis : Verwenden Sie die Relation aus Aufgabe 1 c).

[1] http://pdg.lbl.gov/2002/clebrpp.pdf