UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik (Theoretische Physik)
Dr. Stefan Gerlach
Raum P 817, Tel. (07531)88-3825
E-mail: stefan.gerlach@uni-konstanz.de

Universität Konstanz

Übungen zur Computerphysik II
Wintersemester 2020/21

Übungsblatt 6
Ausgabe 14.1., Übungen KW 6, Abgabe bis 21.2.

Zufallszahlen und Anwendungen

1. **Aufgabe: Zufallszahlentests**

Betrachte die folgenden (Pseudo-)Zufallszahlengeneratoren

(A) Linearer Kongruenzgenerator

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \mod m$$

mit $m = 2^{31}, a = 65539, b = 0$ (RANDU).

(B) Linearer Kongruenzgenerator mit $m = 2^{31}, a = 1103515245, b = 12345$ (GLIBC).

(C) Nachkommastellen von π.
Hinweis:

```
from sympy.mpmath import mp

N=1000  # number of digits
mp.dps = N
s = str(mp.pi)

for i in range(2,N):
        print s[i],
```

(D) Mersenne-Twister (MT19937) von Python (random()).

Der Startwert (SEED) kann frei gewählt werden.

a) Bestimme für alle PRNGs $N = 10^4$ Zufallszahlen in drei Spalten und plotte diese dreidimensional ("Parking-Lot"- bzw. Spektraltest). Bei welchen PRNGs erkennt man durch Drehung des Plots Hyperebenenverhalten?

b) Bestimme für alle PRNGs $N = 100, 10000, 1000000$ Zufallszahlen und berechne

$$\langle z_i \rangle,\ \langle z_i z_{i+1} \rangle.$$

c) Überpruefe für alle Fälle von b), ob gilt

$$\langle z_i z_{i+1} \rangle = \langle z_i \rangle \langle z_{i+1} \rangle.$$

2. **Aufgabe: Monte-Carlo-Integration**

   a) Wir wollen die Fläche eines Kreises mit Hilfe der Stein-Wurf-Methode bestimmen. Effektiv berechnen wir also das Integral

   $$4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

   mit der Monte-Carlo-Integration.

   Schreibe dazu ein Python-Programm und bestimme N-mal zwei unabhängige Zufallszahlen a und b im Bereich $[0, 1]$ und berechne das Verhältnis N_+/N, wobei N_+ die Versuche mit $a^2 + b^2 \leq 1$ sind.

   Vergleiche das Ergebnis für verschiedene Werte von N. Wie gut konvergiert die Methode für $N \to \infty$ gegen den theoretischen Wert?

   b) **Einheitskugel**

   Die MC-Integration ist insbesondere bei hochdimensionalen Integralen konkurrenzlos.

   Erweitere das Programm aus a), um das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel $V_d = \int \mathrm{d}^d x$ zu berechnen. Erzeuge dazu N-mal d unabhängige Zufallszahlen x_i im Bereich $[0, 1]$ und berechne wieder das Verhältnis N_+/N, wobei N_+ hier die Versuche mit $\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leq 1$ sind.

   Stelle das berechnete Volumen für $N = 10^6$ abhängig von der Dimension $d = 1, .., 20$ dar und vergleichen Sie mit dem analytischen Ergebnis

   $$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)}. \tag{1}$$