



Übungen zur Computerphysik II
Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 6

Ausgabe 20.1., Übungen 3.2.+10.2., Abgabe bis 14.2.

Zufallszahlen und Anwendungen

1. Aufgabe: Zufallszahlentests

Betrachte die folgenden (Pseudo-)Zufallszahlengeneratoren

(A) Linearer Kongruenzgenerator

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \pmod{m}$$

mit $m = 2^{31}$, $a = 65539$, $b = 0$ (RANDU).

(B) Linearer Kongruenzgenerator mit $m = 2^{31}$, $a = 1103515245$, $b = 12345$ (GLIBC).

(C) Nachkommastellen von π .

Hinweis:

```
from sympy.mpmath import mp
```

```
N=1000 # number of digits
```

```
mp.dps = N
```

```
s = str(mp.pi)
```

```
for i in range(2,N):  
    print s[i],
```

(D) Mersenne-Twister (MT19937) von Python (random()).

Der Startwert (SEED) kann frei gewählt werden.

a) Bestimme für alle PRNGs $N = 10^4$ Zufallszahlen in drei Spalten und plote diese dreidimensional ("Parking-Lot"- bzw. Spektraltest). Bei welchen PRNGs erkennt man durch Drehung des Plots Hyperebenenverhalten?

b) Bestimme für alle PRNGs $N = 100, 10000, 1000000$ Zufallszahlen und berechne

$$\langle z_i \rangle, \langle z_i z_{i+1} \rangle.$$

c) Überprüfe für alle Fälle von b), ob gilt

$$\langle z_i z_{i+1} \rangle = \langle z_i \rangle \langle z_{i+1} \rangle.$$

2. Aufgabe: Monte-Carlo-Integration

- a) Wir wollen die Fläche eines Kreises mit Hilfe der Stein-Wurf-Methode bestimmen. Effektiv berechnen wir also das Integral

$$4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

mit der Monte-Carlo-Integration.

Schreibe dazu ein Python-Programm und bestimme N -mal zwei unabhängige Zufallszahlen a und b im Bereich $[0, 1]$ und berechne das Verhältnis N_+/N , wobei N_+ die Versuche mit $a^2 + b^2 \leq 1$ sind.

Vergleiche das Ergebnis für verschiedene Werte von N . Wie gut konvergiert die Methode für $N \rightarrow \infty$ gegen den theoretischen Wert?

b) Einheitskugel

Die MC-Integration ist insbesondere bei hochdimensionalen Integralen konkurrenzlos.

Erweitere das Programm aus a), um das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel $V_d = \int d^d x$ zu berechnen. Erzeuge dazu N -mal d unabhängige Zufallszahlen x_i im Bereich $[0, 1]$ und berechne wieder das Verhältnis N_+/N , wobei N_+ hier die Versuche mit $\sum_{i=1}^d x_i^2 \leq 1$ sind.

Stelle das berechnete Volumen für $N = 10^6$ abhängig von der Dimension $d = 1, \dots, 20$ dar und vergleichen Sie mit dem analytischen Ergebnis

$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)}. \quad (1)$$