



Übungen zur Computerphysik II
Wintersemester 2014/15

Übungsblatt 4

Ausgabe 5.12.2014, Übungen 9.12.2014+16.12.2014, Abgabe bis 8.1.2015

Reihenentwicklung und diskrete Fouriertransformation

1. Aufgabe: Fourier-Legendre-Reihe

Mit Hilfe der orthonormalen Legendre-Polynome $P_l(x)$ lässt sich jede Funktion auf dem Intervall $[-1, 1]$ analog zur Fourierreihe in eine *Fourier-Legendre-Reihe* entwickeln:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x).$$

Aufgrund der Normierung der Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}$$

ergeben sich die Entwicklungskoeffizienten zu

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx.$$

- Plotte die ersten sechs Legendre-Polynome (`scipy.special.legendre(n)`).
- Schreibe eine Funktion zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten a_l . Teste sie anhand der Funktionen $f_0(x) = P_0(x)$, $f_1(x) = P_1(x)$, $f_2(x) = P_2(x)$.
- Berechne die Entwicklungskoeffizienten a_l für die Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$
- Plotte die Funktion $\sin(\pi x)$ und die Näherungen bis zur n -ten Ordnung. Wie gut konvergiert die Reihe?
- Berechne analog die Fourier-Legendre Reihe für die Dreiecksfunktion $g(x) = 1 - |x|$ und die Rechteckfunktion $h(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < 0.5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Wie gut konvergiert die Fourier-Legendre-Reihe hier?

2. Aufgabe: Diskrete Fouriertransformation

Mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation wollen wir die Fouriertransformierte einer gedämpften Schwingung untersuchen.

- a) Berechne und Plote die diskrete Fouriertransformation einer konstanten Funktion und einer "δ-Funktion" für unterschiedliche Anzahl von Samplepunkten (`numpy.fft.fft()`). Interpretiere die Ergebnisse.
- b) Berechne die diskrete Fouriertransformation einer abfallenden Exponentialfunktion $f(t) = e^{-\alpha t}$ zuerst für $\alpha = 1$ und $t = [0, 50]$ und Plote Real- und Imaginärteil. Der Realteil beschreibt die Absorption und der Imaginärteil die Phasenverschiebung bei Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung mit einem Atom. Sind die Ergebnisse plausibel? Plote dazu zum Vergleich die (theoretisch erwartete) Lorentzfunktion.
- c) Welchen Einfluß hat die Zerfallskonstante α auf die Fouriertransformierte in b)? Was kann man also über die Lebensdauer eines Zustandes anhand der Linienbreite des Spektrums aussagen?
- d) Berechne die diskrete Fouriertransformation einer gedämpften Schwingung $f(t) = e^{-t} \cos(10t)$ für $t = [0, 50]$. Plote wieder Real- und Imaginärteil. Was ist der Unterschied zur abfallenden Exponentialfunktion aus b)?

Gesegnete Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2015!