DiskreteWahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung (Bernoulli-Prozesse):

$P_k = B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (n-Würfe, k-mal Auftreten, p-W. eine Seite)

$p = \frac{1}{2}: \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}: \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

$$n = 10,\ k = 5:\ \frac{1}{2^{10}}\binom{10}{5} = \frac{\text{Binomial}[10,5]}{1024} = 25\,\%$$

$$n = 10,\ k = 0:\ \frac{1}{2^{10}}\binom{10}{0} = 0.1\,\%$$

$$\text{Normierung}:\ \sum_{k=0}^{n} P_k = 1$$

$$\text{Mittelwert}:\ \langle x \rangle = \overline{x} = \mu = \sum_{k=0}^{n} p_k\, x_k = n\,p\ \left(p = 0.5:\ \mu = \frac{n}{2}\right)$$

$$\text{Varianz}:\ \sigma^2 = \sum_{k=0}^{n} p_k\,(x_k - \mu)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = n\,p\,(1-p)$$

$$\text{rel. Breite}:\ \frac{\sigma}{\mu} = \sqrt{\frac{1-p}{np}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Beispiele:

1. Qualitätssicherung: N Teile, F fehlerhaft

W. für Null Fehler bei Auswahl von n Teilen.

$$P_0 = (1-p)^n$$

2. Ising-Spinkette: N Spins auf 1 D Gitter mit $m_i = \pm 1$

$$P(M) = \binom{M}{\frac{N+M}{2}} p^{\frac{N+M}{2}} (1-p)^{\frac{N-M}{2}} = B_{M,p}\left(\frac{N+M}{2}\right)$$

$$\text{Mittelwert}:\ \langle M \rangle = N\,(2\,p-1),\ \frac{\langle M \rangle}{N} = 2\,p-1$$

$$\text{Varianz}:\ \sigma^2 = 4\,N\,p\,(1-p)$$

$$\text{rel. Breite}:\ \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \to 0\ (N \to \infty)$$

Grenzwert $(n \to \infty,\ p \to 0)$ $(n\,p = \lambda = \text{const.})$: Poisson-Verteilung

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} E^{-\lambda}$$

Normierung : 1

Mittelwert : $\langle x \rangle = \sigma^2 = \lambda \rightarrow \frac{\sigma}{\langle x \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Beispiele :

1. Blitzeinschläge : $\lambda = 0.1$ (Einschläge pro Jahr und ha)
2. Regentropfen : $n = 8 \times 8$ Felder, $N = 100$ Regentropfen

$\lambda = \frac{N}{n} = \frac{25}{16}$

3. Radioaktiver Zerfall : Wieviele Zerfälle (n) von N Teilchen pro Zeiteinheit

$P_{pN}(n) = \frac{(pN)^n}{n!} E^{-pN}$

$N = 10^{18}$ U Atomkerne, $t_h = 4.5$ Mrd. Jahre

$\alpha = \frac{\ln 2}{t_h} = 7 \times 10^{-18}\ s^{-1}$

$\Delta t = 1\ s$: $\langle n \rangle = \alpha N \Delta t = 7$

Binomial $\rightarrow$ Poisson ($n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $np = \lambda$) $\rightarrow$ Normalverteilung ($\lambda \rightarrow \infty$)

Binomial $\rightarrow$ Normalverteilung ($n \rightarrow \infty$, p fest)

->kontinuierliche Verteilungen

Numerische Integration

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, \Delta x, \quad x_i = a + i\, \Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{N}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} f(x)\, dx$$

$$\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} f(x)\, dx = f(x_i)\, \Delta x \text{ Rechteckregel}$$

$$\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} f(x)\, dx = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x \text{ Mittelpunktsregel (Tangententrapezregel)}$$

$$\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} f(x)\, dx = \frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{2} \Delta x \text{ Sehnentrapezregel}$$

$$\left(\text{summierte Regel} : I = \frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right)$$

$$\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} f(x)\, dx = \frac{f(x_i) + 4 f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right) + f(x_i + \Delta x)}{6} \Delta x \text{ Simpsonregel (Keplersche Fassregel)}$$

(summierte Regel : Euler - Maclaurin - Regel)

... (allg. : Newton - Cotes - Formeln)